

## ΘΕΜΑ : Population Modeling- Logistic growth

### Εισαγωγή –Προετοιμασία

#### 1)Αφόρμηση –Ερωτήσεις για την κινητοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών.

- Έχετε σκεφτεί ποτέ αν υπάρχει η δυνατότητα πρόβλεψης του μεγέθους ενός πληθυσμού ατόμων μετά απο  $t$  χρόνια ;
- Αναφέρεται παράγοντες που πιστεύεται ότι επηρεάζουν την δυνατότητα αύξησης του μεγέθους ενός πληθυσμού ;  
Να διακρίνεται δύο περιπτώσεις : α) στο μικρόκοσμο (βακτήρια) β) στους ανθρώπινους οργανισμούς (είδη ζώων που ζούν στο δάσος).
- Η δυνατότητα να προβλέψουμε τους παράγοντες που επηρεάζουν τα φυσικά φαινόμενα ακολουθούν νόμους της Φυσικής. Όμως οι παράγοντες που επηρεάζουν την αύξηση του μεγέθους ενός πληθυσμού είναι σταθεροί για κάθε ομάδα ατόμων και σε κάθε περιοχή ;

#### 2)Θεωρητικό πλαίσιο

##### A)

Ο αριθμός ( $N$ ) των ατόμων σε ένα πληθυσμό θα αυξηθεί, εάν τα άτομα αναπαράγουν σε ποσοστό επαρκές για να αντικαταστήσουν τον εαυτό τους, συν κάποια άλλα. Καθώς ο πληθυσμός μεγαλώνει την πάροδο του χρόνου, όλο και περισσότερα άτομα αναπαράγουν με αυτόν τον ρυθμό, και ο συνολικός πληθυσμός αυξάνεται όλο και πιο γρήγορα.

Αν θεωρηθεί ότι η αύξηση του πληθυσμού μίας ομάδας δεν επηρεάζεται απο εξωτερικούς παράγοντες τότε αναμένουμε ο πληθυσμός να ακολουθεί απλή γεωμετρική πρόοδο αύξησης (Vandermeer & Goldberg, 2004).

Αυτή είναι η βάση του εκθετικού μοντέλου ανάπτυξης ενός πληθυσμού:

*Από μαθηματική άποψη, αναμένουμε ο ρυθμός ανάπτυξης να αυξάνει ανάλογα με το μέγεθος του πληθυσμού:  $dN / dt = rN$ , (1)*

*όπου:*

*$dN / dt$  είναι η προβλεπόμενη ρυθμός αύξησης του πληθυσμού ενός δεδομένου μεγέθους*

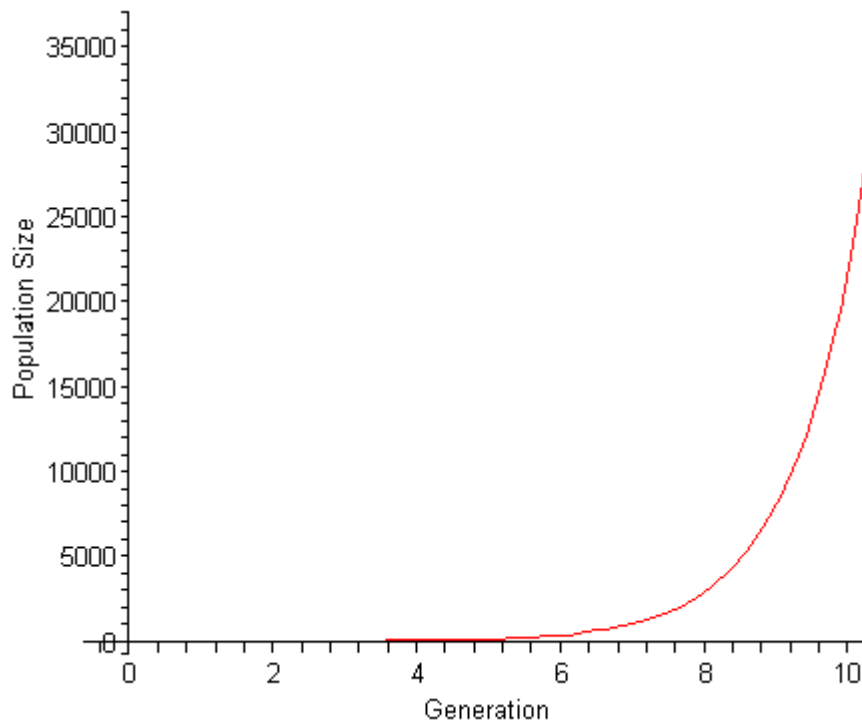
*$N$ , είναι το τρέχον μέγεθος του πληθυσμού*

*$t$ , είναι ο χρόνος*

*$r$ , είναι το κατά κεφαλήν ρυθμός ανάπτυξης, η οποία αντανακλά το πόσο ένα συγκεκριμένο άτομο επηρεάζει το μέγεθος του πληθυσμού.*

*Αυτή η διαφορική εξίσωση λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους του πληθυσμού την πάροδο του χρόνου ( $dN/ dt$ ) αυξάνεται με το τρέχον μέγεθος του πληθυσμού ( $N$ ) με σταθερά αναλογίας ίση με το ρυθμό ανάπτυξης ( $r$ ).*

Η λύση της εξίσωσης (1) είναι :  $N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$



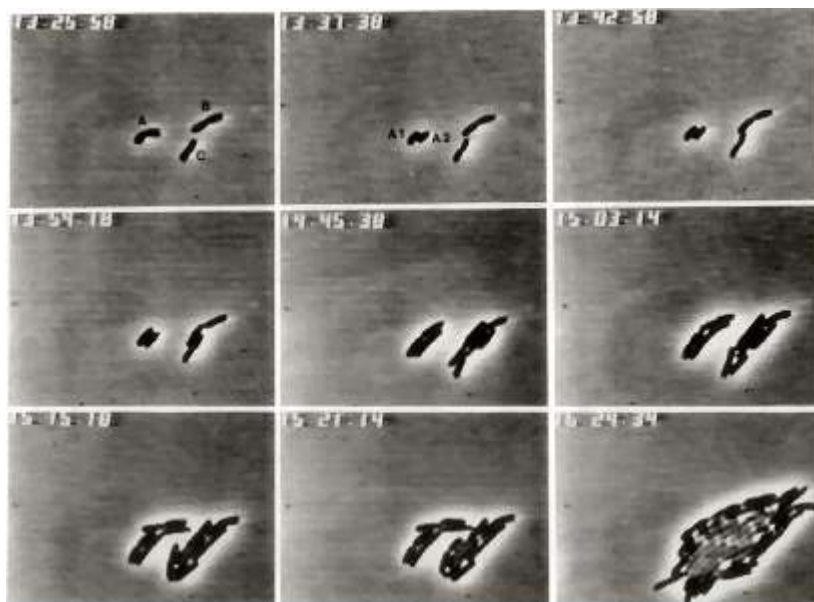
Ερώτηση :

Πιστεύετε ότι αυτό το μοντέλο πρόβλεψης αύξησης του πληθυσμού είναι ρεαλιστικό ;

Μπορείτε να σκεφτείτε απλά παραδείγματα .

Παράδειγμα :

Η παρακάτω εικόνα παρουσιάζει τον ρυθμό ανάπτυξης του βακτηρίου Escherichia coli:



Παρατηρήστε ότι ο πληθυσμός αρχίζει με μόλις τρία βακτήρια, και μέσα σε 20 λεπτά ο πληθυσμός έχει διπλασιαστεί. Εντός τριών ωρών, ο πληθυσμός έχει αυξηθεί δραματικά!

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το χρόνο διπλασιασμού για τον υπολογισμό του ποσοστού της αύξησης του πληθυσμού *E. coli*. Αν ο αρχικός πληθυσμός είναι  $N_0$ , τότε ο χρόνος  $T$  για τον διπλασιασμό του πληθυσμού είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε ο πληθυσμός να ισούται με  $2N_0$ .

$$N(t) = N_0 \cdot e^{rT} \Leftrightarrow$$

$$2N_0 = N_0 \cdot e^{rT} \Leftrightarrow$$

$$e^{rT} = 2 \Leftrightarrow$$

$$T = \ln 2 / r$$

Έστω  $T = 20$  λεπτά, έχουμε  $r = 0.035 \text{ min}^{-1}$ .

Αυτό σημαίνει ο πληθυσμός βακτηριδίων αυξάνεται με ρυθμό περίπου 3,5% ανά λεπτό, το οποίο ισοδυναμεί με 816% ανά ώρα!

Για τα μικρόβια, αυτό μπορεί να μην είναι πρόβλημα. Ολόκληρη η αποικία του *E.coli* στο κάτω δεξί μέρος του Σχήματος 2 θα μπορούσε εύκολα να χωρέσει στο κεφάλι μιας καρφίτσας. Ωστόσο, όμως για τους μεγαλύτερους θαλάσσιους οργανισμούς, η εκθετική ανάπτυξη μπορεί να διατηρηθεί για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα μόνο κάτω από μη ρεαλιστικές συνθήκες (Molles, 2004). Η αύξηση του πληθυσμού είναι περιορισμένη επειδή τα άτομα αναπαράγουν λιγότερο, αλλά ακόμα και αν αναπαράγουν χωρίς να πεθαίνουν το ίδιο το περιβάλλον δεν μπορεί να υποστηρίξει την εκθετική ανάπτυξη του πληθυσμού( επάρκεια τροφής, νερού κλπ).

Όπως γίνεται κατανοητό μία από τις υποθέσεις του εκθετικού μοντέλου ανάπτυξης είναι ότι οι βιώσιμοι πόροι είναι άπειροι, άρα αποτελεί μη ρεαλιστικό βιολογικό μοντέλο πρόβλεψης της ανάπτυξης του πληθυσμού.

## **B)**

Το μοντέλο αναλογικής αύξησης του πληθυσμού (logistic growth) είναι μια τροποποίηση του εκθετικού μοντέλου που παράγει πολύ πιο ρεαλιστικές προβλέψεις.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) \quad (2)$$

$$\left( 1 - \frac{N}{K} \right) \text{ «η αρνητική ανάδραση»}$$

$K$ , η ικανότητα αναπαραγωγής.

Απο την λύση της εξίσωσης (2) παίρνουμε :

$$N = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0) e^{-rt}} \quad (3)$$

Παρακολουθήστε τα ακόλουθα video :

<https://www.youtube.com/watch?v=rXlyYFXyflM>

<https://www.youtube.com/watch?v=uemhtqZHnak>

### **Βιβλιογραφία :**

[http://www.mathwords.com/l/logistic\\_growth.htm](http://www.mathwords.com/l/logistic_growth.htm)

<https://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/diffeq/logistic/logi1.html>

[http://www.mathwords.com/l/logistic\\_growth.htm](http://www.mathwords.com/l/logistic_growth.htm)

<http://www.maa.org/publications/periodicals/loci/joma/an-introduction-to-population-ecology-the-logistic-growth-equation>

Ανάλυση του αναλογιστικού μοντέλου :

[http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_function)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic\\_map](http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map)

### **3) Διερεύνηση του μοντέλου : Έλεγχοι υποθέσεων**

Στο εικονικό εργαστήριο :

[http://virtualbiologylab.org/Models/Model\\_LogisticGrowth.html](http://virtualbiologylab.org/Models/Model_LogisticGrowth.html)

θα διερευνηθεί το πώς οι διάφορες παράμετροι επιδρούν στο λογιστικό μοντέλο ανάπτυξης επηρεάζουν τη δυναμική του πληθυσμού.

Λεπτομέρειες μοντέλου :

Αποτελείται από δύο πληθυσμούς παράπλευρα (κόκκινο και μπλε), με τους ελέγχους ολισθητήρα για κάθε μία από τις παραμέτρους. Κάποιος μπορεί να παρατηρήσει τα άτομα στους πληθυσμούς που γεννιούνται και πεθαίνουν την πάροδο του χρόνου στο παράθυρο κοσμοθεωρίας, και συγχρόνως ακολουθούν αριθμητικές και γραφικές αναπαραστάσεις των πληθυσμών.

### **Ανάλυση των δεδομένων και των μεταβλητών του μοντέλου :**

<b>Table 1: Reporters for the Logistic Growth model Reporter</b>	<b>Description</b>
World-view window	This is an animation of the red and blue populations, each small dot represents an individual, while lighter circles represent a birth, and deaths are represented by an 'x'

	Κάθε μικρή κουκίδα αντιπροσωπεύει ένα άτομο, ενώ ελαφρύτερα κύκλοι αντιπροσωπεύουν μια γέννηση, και οι θάνατοι αντιπροσωπεύεται από ένα «x»
Population Size (Graph)  Το μέγεθος του πληθυσμού (Γράφημα)	Plot of overall population sizes over time, in all the graphs the red and blue populations are represent by traces of their respective colors.  Το γράφημα με το συνολικό μέγεθος του πληθυσμού με την πάροδο του χρόνου. Σημειώνονται με διαφορετικό χρώμα κάθε φορά.
Population Growth Rate (Graph)  Ρυθμός Ανάπτυξης του πληθυσμού (Γράφημα)	The growth rate of the <i>overall population</i> for a given population size Ο ρυθμός αύξησης του συνολικού πληθυσμού για ένα δεδομένο μέγεθος του πληθυσμού.
Per Capita Growth Rate (Graph)  Κατά κεφαλήν ρυθμός αύξησης (Γράφημα)	The amount by which a <i>particular individual</i> is changing the population for a given population size  Το ποσό κατά το οποίο ένα συγκεκριμένο άτομο μεταβάλλει τον πληθυσμό για ένα δεδομένο μέγεθος του πληθυσμού
Births and Deaths  Θάνατοι -Γεννήσεις	These numeric reporters give the number of births and deaths in each population at a given time step. Αυτά τα αριθμητικά δεδομένα δίνουν τον αριθμό των γεννήσεων και των θανάτων σε κάθε πληθυσμό σε ένα συγκεκριμένο βήμα του χρόνου.

<b>Table 2: Controls for the Logistic Growth model Control</b>	<b>Action</b>
Setup	Clicking clears all values, resets model to current parameter settings
Go	Clicking sets the model in motion (clicking again will stop it)
Red-N-Zero Blue-N-zero	Sets the initial population size (N0) for each population (0-2000, in increments of 5)

Red-r Blue-r	Sets the per capita growth rate for each population (0-5, in increments of 0.1)
Red-K Blue-K	Sets the carrying capacity for each population (0-1000, in increments of 5)

### Διερεύνηση :

Για να εξετάσετε την επίδραση της κάθε παραμέτρου προτίνεται να ρυθμίσετε αρχικά τις ίδιες παραμέτρους για τους κόκκινους και μπλε πληθυσμούς, και στη συνέχεια να αυξήσετε ή μειώσετε μία παράμετρο σε έναν από τους πληθυσμούς και να παρατηρήσετε την επίδραση.

### Υποθέσεις :

-Ο ρυθμός ανάπτυξης μειώνεται όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού.

-Όταν το N είναι μικρό, η αρνητική ανάδραση προσεγγίζει το 1 και ο πληθυσμός αυξάνεται περισσότερο-ή-λιγότερο εκθετικά.

-Όταν το N πλησιάζει το K, η αρνητική ανάδραση προσεγγίζει το μηδέν και τότε ο συνολικός ρυθμός ανάπτυξης προσεγγίζει το 0.

-Είναι σημαντικό να σημειωθεί  $dN / dt$  είναι μεταβολή στο μέγεθος του πληθυσμού πάροδο του χρόνου, δηλαδή ότι όταν  $dN / dt = 0$ , το μέγεθος του πληθυσμού θα παραμείνει σταθερή.

-Το μοντέλο δείχνει ότι μια ποσότητα αυξάνεται γρήγορα στην αρχή και στη συνέχεια με πιο αργό ρυθμό ώστε να πλησιάζει ένα ανώτατο όριο.

*Αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται για φαινόμενα, όπως η αυξανόμενη χρήση της νέας τεχνολογίας, η εξάπλωση της νόσου, ο κορεσμός της αγοράς (πωλήσεις).*

*Ένα τέτοιο μοντέλο αποτελεί μία θεωρητική βάση για βιώσιμα μεγέθη πληθυσμών.*

### Άσκηση

#### Μοντέλο : *Odocoilus virginianus*

Η KDFWR ορίζει κατευθυντήριες γραμμές για το κυνήγι και το ψάρεμα στην πολιτεία, και ανέφερε μια εκτίμηση των 900.000 ελάφια πριν από την κυνηγετική περίοδο του 2004. Ο Johnson (2003) σημειώνει: «Ένας πληθυσμός ελαφιών που έχει την αφθονία για να φάει και δεν έχει κυνηγηθεί από τον άνθρωπο ή άλλα αρπακτικά θα διπλασιάζεται κάθε τρία χρόνια» Αυτό αντιστοιχεί σε ποσοστό αύξησης  $r = \ln(2) / 3 = 0.2311$ . (Αυτό προϋποθέτει -άφθονη προμήθεια τροφίμων και χωρίς θήρευση - ότι ο πληθυσμός αυξάνεται με γεωμετρική πρόοδο, η οποία είναι λογικό, τουλάχιστον βραχυπρόθεσμα.)

Η KDFWR αναφέρει ο μέσος όρος πυκνότητας είναι περίπου 27 ελάφια ανά τετραγωνικό μίλι. Ας υποθέσουμε ότι η φέρουσα ικανότητα  $K$  είναι 39.732 τετρ. Μίλια.

Ας μελετήσουμε το λογιστικό μοντέλο ανάπτυξης, χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές:

Στα μπλε:

$P_0 = 900$  εκατομμύρια ελάφια,  $K = 39,732$  (περίπου),  $r = 0,2311$  ανά έτος.

Στα κόκκινα:

Αλλάξτε τον αρχικό  $P_0$  πληθυσμό σε 1200 εκατομμύρια ελάφια και θεωρείστε τις ίδιες τιμές  $K$ ,  $r$ .

Ερωτήσεις :

- ✓ Εξηγήστε τι παρατηρείτε. Πως επηρεάζει ο αρχικός πληθυσμός  $P_0$  το μοντέλο;
- ✓ Περιγράψτε τη συμπεριφορά του πληθυσμού μετά από 100 χρόνια.
- ✓ Πού είναι η πιο απότομη γραφική παράσταση; Τι συμβαίνει με τα είδη που εκείνη την εποχή; Εξηγήστε τις μεταβολές που παρατηρείτε.
- ✓ Πώς επηρεάζεται η συμπεριφορά σε σχέση με τη φέρουσα ικανότητα  $K$ ;
- ✓ Πώς επηρεάζεται η συμπεριφορά σε σχέση με το ρυθμό αύξησης  $r$ ;
- ✓ Να βρείτε τις 'σταθερές λύσεις ισορροπίας' (δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής του μοντέλο τείνει να σταθεροποιηθεί) Πώς σχετίζονται με  $K$ ;

Σύμφωνα με την KDFWR είχε την υψηλότερη πυκνότητα του πληθυσμού των ελαφιών το 2003 σε 47 ελάφια ανά τετραγωνικό μίλι.  $K = 352,1$   
Πόσα ελάφια ζουν στην Owen County;

Αν 27 ελάφια ανά τετραγωνικό μίλι είναι η βέλτιστη, ποια είναι η φέρουσα ικανότητα του νομού; Τι σας λέει αυτό για τον πληθυσμό ελαφιών;

Ας υποθέσουμε ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των ελαφιών (23.11% ανά έτος) ισχύει και για τον Owen County. Πόσα χρόνια θα χρειαστούν για το συγκεκριμένο πληθυσμό ελαφιών για να μειωθεί στη φέρουσα ικανότητα Owen County;

**Επέκταση :**

Το αναλογικό μοντέλο ανάπτυξης πληθυσμών σε ποιες άλλες επιστήμες μπορεί να εφαρμοστεί ;

Να αναφέρεται μοντέλα και να αναλύστε τις παραμέτρους τους.

**Ανατροφοδότηση-Έλεγχος γνώσεων**

1) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά (μαθηματικοί τύποι (2) και (3)) τα αποτελέσματα των διερευνήσεων σας.

2) Μια αποικία των βακτηριδίων *B. dendroides* αυξάνεται σε ένα petri dish. Η περιοχή της αποικίας (σε τετραγωνικά εκατοστά) μπορεί να μοντελοποιηθεί από :

$$A = \frac{49.9}{1 + 134 \cdot e^{-1.96t}}$$

όπου το  $t$  είναι ο παρερχόμενος χρόνος σε ημέρες. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση για την αύξηση της αποικίας βακτηριδίων και να περιγράψετε τις πληροφορίες που λαμβάνεται.

(Υπόδειξη: Η γραφική παράσταση μπορεί να σχεδιαστεί με geogebra)

3) Η βιομάζα ενός πληθυσμού σε σχέση με τον χρόνο  $t$  δίνεται απο τον παρακάτω πίνακα : μάζα  $y$  (σε γραμμάρια) μετά από  $t$  ώρες

$\psi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t$	9.6	18.3	29	47.2	71.1	119.1	174.6	257.3	350.7	441

Να γράψετε το αναλογιστικό μαθηματικό μοντέλο της βιομάζας  $\psi$  σε συνάρτηση με το χρόνο  $t$ .

<http://graasp.eu/spaces/54cbab4287e570896157b86b>