

Γεωμετρική προσέγγιση της έννοιας του «απείρου»

Οι παρακάτω πίνακες αναπαριστούν την έννοια του απείρου μέσα από διαφορετικές γεωμετρικές προσεγγίσεις.

✚ Εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες/ καταγραφή των διδακτικών ενοτήτων στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών για όλες τις σχολικές βαθμίδες:

- Τετράγωνο, εμβαδόν τετραγώνου
- Μαθηματικά ΣΤ Δημοτικού : Θεματική ενότητα 6 (6.56, 6.59, 6.61)
- Β Γυμνασίου (Μέρος Β: Εμβαδά επίπεδων σχημάτων)
- Β Λυκείου (Κεφάλαιο 10^ο : 10.1)
- Γεωμετρικά μοτίβα, Αριθμητικά μοτίβα, Γεωμετρική πρόοδος , άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου
- Μαθηματικά ΣΤ Δημοτικού : 5.53, 5.54, 5.55
- Άλγεβρα Α Λυκείου : Η έννοια της ακολουθίας 5.1, Γεωμετρική πρόοδος και άθροισμα απείρων όρων της 5.2

Παραδείγματα για την έννοια του απείρου στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

Ειδική αναφορά στο παράδοξο του Ζήνωνα του Ελεάτη

Φύλλο δραστηριοτήτων



- Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- Στην συνέχεια με κορυφές τα μέσα του αρχικού τετραγώνου να κατασκευάσετε ένα δεύτερο τετράγωνο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- Όμοια να κατασκευάσετε ένα νέο τετράγωνο και με κορυφές τα μέσα του δεύτερου τετραγώνου να κατασκευάσετε ένα τρίτο τετράγωνο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- Να επαναλάβετε την διαδικασία τουλάχιστον 5 φορές
- Γεωμετρική κατασκευή τετραγώνων με Geogebra

Ερωτήσεις:

- Τι παρατηρείτε για τα εμβαδά των σχηματιζόμενων τετραγώνων ;
- Αν η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι 4 , μπορείτε να υπολογίσετε τα εμβαδά των E_1, E_2, E_3, \dots των σχηματιζόμενων τετραγώνων ;
- Μπορείτε να υπολογίσετε το άθροισμα $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$;

Η δραστηριότητα μπορεί να ενταχθεί και στην διδακτική ενότητα : Κανονικά πολύγωνα της Β Γυμνασίου.

- Να θεωρήσετε τώρα ένα κανονικό εξάγωνο. Πως υπολογίζουμε αλγεβρικά το εμβαδόν του ;
- Στην συνέχεια με κορυφές τα μέσα του αρχικού εξαγώνου να κατασκευάσετε ένα δεύτερο εξάγωνο. Πως υπολογίζουμε το μήκος της πλευράς του δεύτερου εξαγώνου με την βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών ; Να υπολογίσετε πάλι το εμβαδόν του.
- Όμοια να κατασκευάσετε ένα νέο τετράγωνο και με κορυφές τα μέσα του δεύτερου τετραγώνου να κατασκευάσετε ένα τρίτο τετράγωνο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Η γεωμετρική κατασκευή με την βοήθεια του Geogebra

- Τι παρατηρείτε ; Ισχύει το ίδιο με τετράγωνο για τα εμβαδά των σχηματιζόμενων κανονικών εξαγώνων ;

Γεωμετρική κατασκευή : Η παραπάνω δραστηριότητα μπορεί να υλοποιηθεί εναλλακτικά με κανόνα και διαβήτη.

B)



- ✦ **Εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες/ καταγραφή των διδακτικών ενοτήτων στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών για όλες τις σχολικές βαθμίδες:**

➤ άπειρο πλήθος - πεπερασμένο πλήθος- πεπερασμένη τιμή - άπειρο πλήθος.

Σημείωση: Οι έννοιες αυτές δεν αναλύονται στα μαθηματικά Γυμνασίου και Λυκείου και επιπλέον δεν γίνεται αναφορά αυτών.

Φύλλο δραστηριοτήτων

Ερώτηση: Αν προσθέσουμε άπειρα θετικά στοιχεία ποιο μπορεί να είναι το αποτέλεσμα;

Ερωτήσεις διερεύνησης :

- Θεωρήστε ένα τετράγωνο πλευράς 1. Να το διαιρέσετε σε δύο ισεμβαδικά σχήματα. Με ποιο τρόπο μπορεί να γίνει ; Τι είδους σχήματα προκύπτουν ;
- Τα ισεμβαδικά είναι και ίσα ;
- Να επαναλάβετε την διαδικασία για ένα από τα δύο νέα ισεμβαδικά σχήματα;

Οι διχοτομήσεις μπορούν να υλοποιηθούν με το λογισμικό *geogebra* αλλά και με κανόνα και διαβήτη

- Το άθροισμα των εμβαδών των νέων σχημάτων με τι είναι ίσο ;

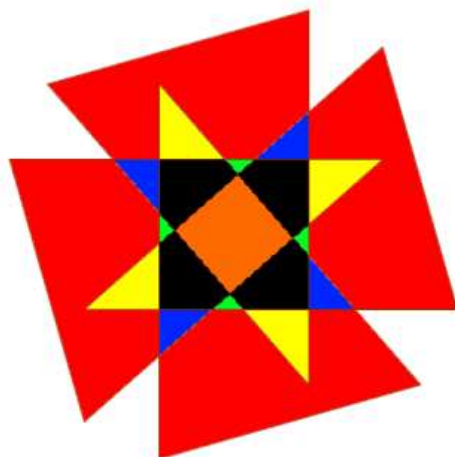
Γεωμετρική κατασκευή Geogebra

- Ισχύει το ίδιο και στην περίπτωση όπου το αρχικό τετράγωνο δεν έχει εμβαδόν 1 ;

Επέκταση_Δημιουργικές δραστηριότητες

Καλλιτεχνικές δημιουργίες με όμοια ή ίσα γεωμετρικά σχήματα που ακολουθούν μία επαναλαμβανόμενη διαδικασία.

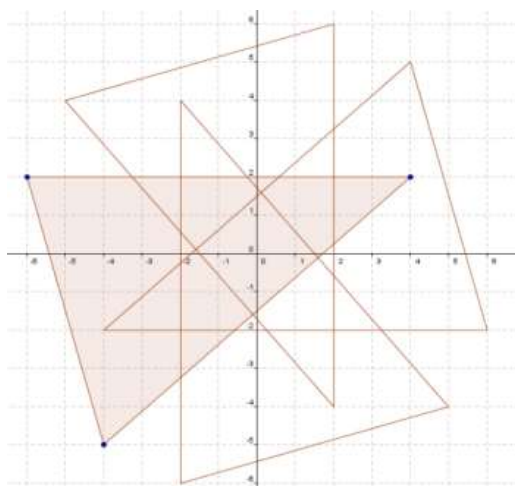
1) Ελκυστικές περιστροφές



Σχεδιάζουμε σκαληνό τρίγωνο. Αν το τρίγωνο αυτό περιστρεφεί γύρω από κάποιο σημείο του επιπέδου, το νέο τρίγωνο είναι όμοιο και ίσο με το αρχικό ;

Δημιουργήστε μερικές από τις δικές σας εικόνες περιστρέφοντας ένα σχήμα μέσα από πολλαπλάσια 90°

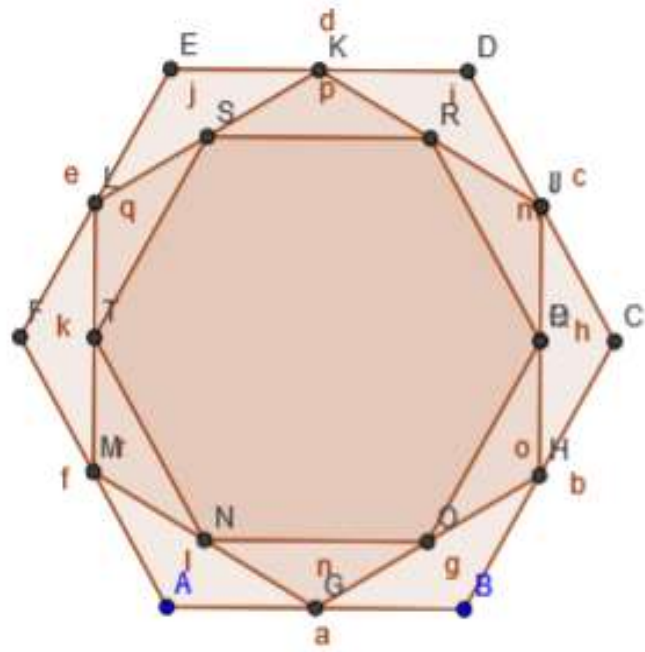
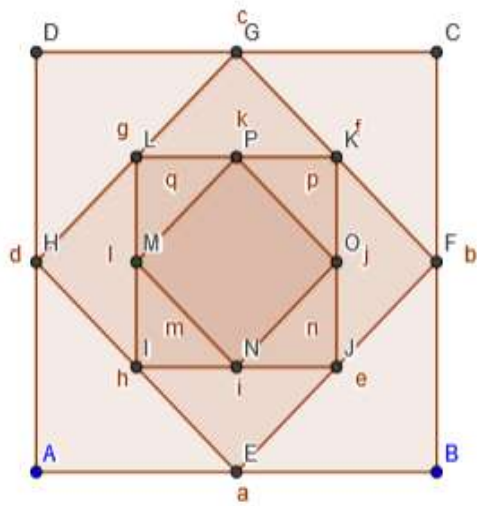
Στην περίπτωση του τριγώνου



Να χρησιμοποιήσετε ένα ισομετρικό πλέγμα στο λογισμικό *geogebra* για να περιστρέψετε ένα σχήμα μέσα από πολλαπλάσια των 60° ή 45°

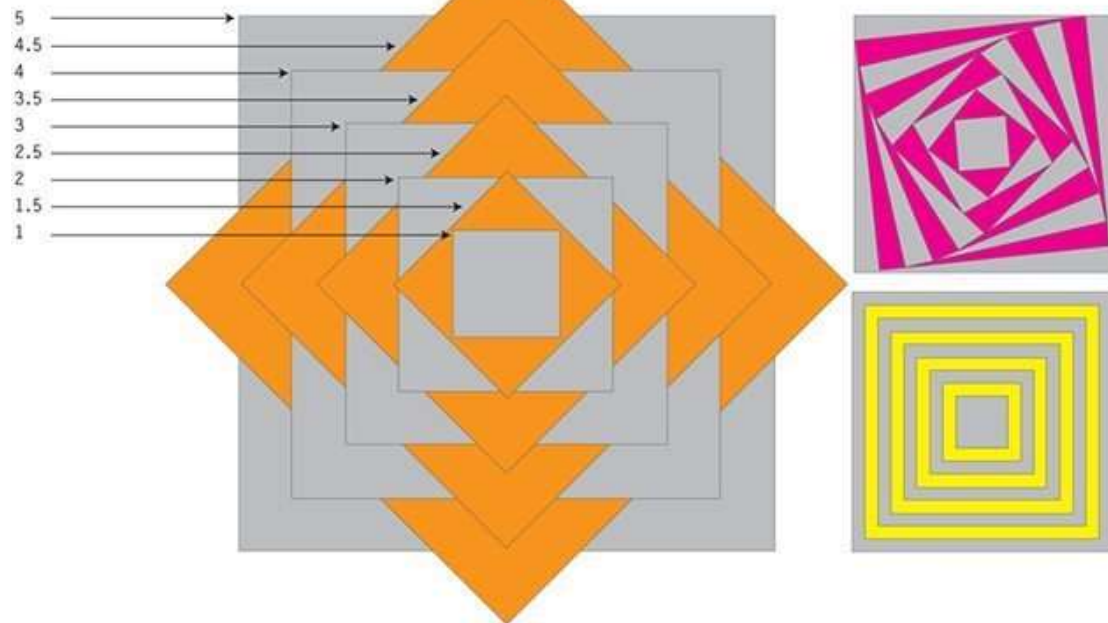
Εδώ είναι το είδος της εικόνας που θα μπορούσατε να δημιουργήσετε:

2) Να χρωματίσετε με διαφορετικά υλικά και σχέδια κατασκευές του φύλλου δραστηριοτήτων που χρησιμοποίησατε για την διερεύνηση σας.



3) Ως συνέχεια της προηγούμενης δραστηριότητας : Σχεδιασμός όμοιων ευθυγράμμων σχημάτων.

Stacking Squares measurement art



Πηγή: Πλατεία & Μοτίβα

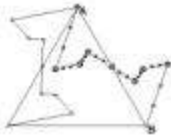


4) Παρουσίαση μέσω μιας σειράς βήμα προς βήμα οδηγιών για να σχεδιάσουν οι μαθητές τις δικές τους καμπύλες (Υποδείγματα υποστήριξης με περιγράμματα κανονικών πολυγώνων για την παροχή "γρήγορης εκκίνησης" εάν είναι απαραίτητο).

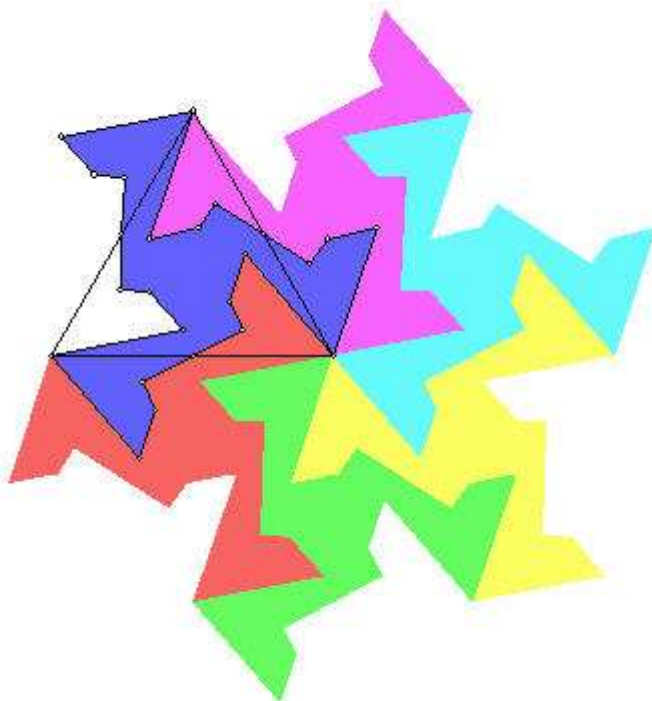
5) *Τουμάσης Μ., Αρβανίτης Τ. (2002) «Μαθηματικά και τέχνη: Διακοσμητικά σχήματα με χρήση γεωμετρικού λογισμικού». 19ο πανελλήνιο συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Κομοτηνή, φθινόπωρο 2002.*

Μη κανονικά ψηφιδωτά τύπου Escher.



α) Έναρξη από ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

<p>Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο κατασκευάζουμε μια τεθλασμένη γραμμή από την μια κορυφή μέχρι το μέσο της πλευράς.</p>	
<p>Περιστρέφουμε την τεθλασμένη γραμμή κατά 180° γύρω από το μέσο της πλευράς.</p>	

<p>Περιστρέφουμε και τις δύο τεθλασμένες γύρω από την κορυφή A κατά 60°, και την νέα που προκύπτει από τη περιστροφή πάλι γύρω από την κορυφή B</p>	
<p>Κατασκευάζουμε το εσωτερικό του πολυγώνου και το χρωματίζουμε</p>	
<p>Στη συνέχεια με διαδοχικές περιστροφές του πολυγώνου γύρω από την κορυφή B κατά 60° θα φθάσουμε στο παρακάτω σχήμα</p>	



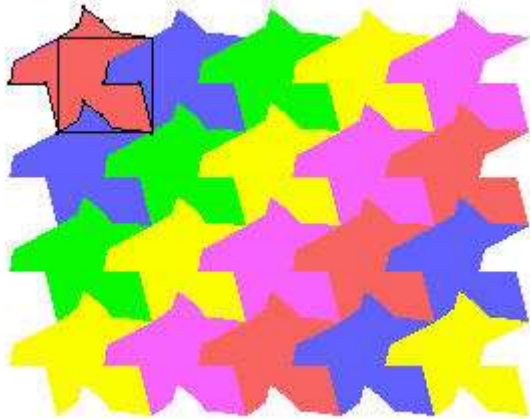
β) Έναρξη από ένα τετράγωνο

<p>Σχεδιάζουμε δυο τεθλασμένες γραμμές ανάμεσα σε δυο διαδοχικές κορυφές ενός τετραγώνου</p>	
<p>Μεταφέρουμε την μια οριζόντια και την άλλη κατακόρυφα κατά διάστημα ίσο με την πλευρά του τετραγώνου.</p>	

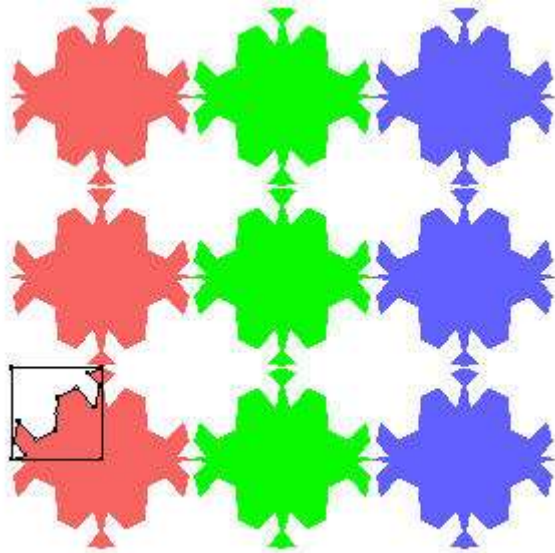
Κατασκευάζουμε το πολύγωνο που ορίζεται από τις κορυφές της πολυγωνικής γραμμής και χρωματίζουμε.

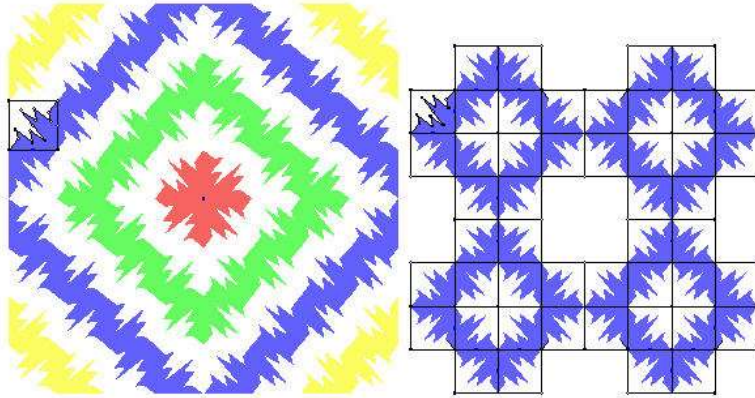


Μεταφέρουμε το πολύγωνο οριζόντια κατά διάστημα ίση με την πλευρά του τετραγώνου όσες φορές θέλουμε.
Κάνουμε το ίδιο κατακόρυφα και θα καταλήξουμε στο παρακάτω σχήμα



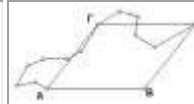
Με παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας ανακλάσεις, περιστροφές και μεταφορές πάνω σε ένα σχήμα - βάση μπορούμε να δημιουργήσουμε τα παρακάτω σχήματα.



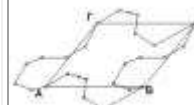


γ) Έναρξη από ένα παραλληλόγραμμο

Σχεδιάζουμε δύο τεθλασμένες γραμμές ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου



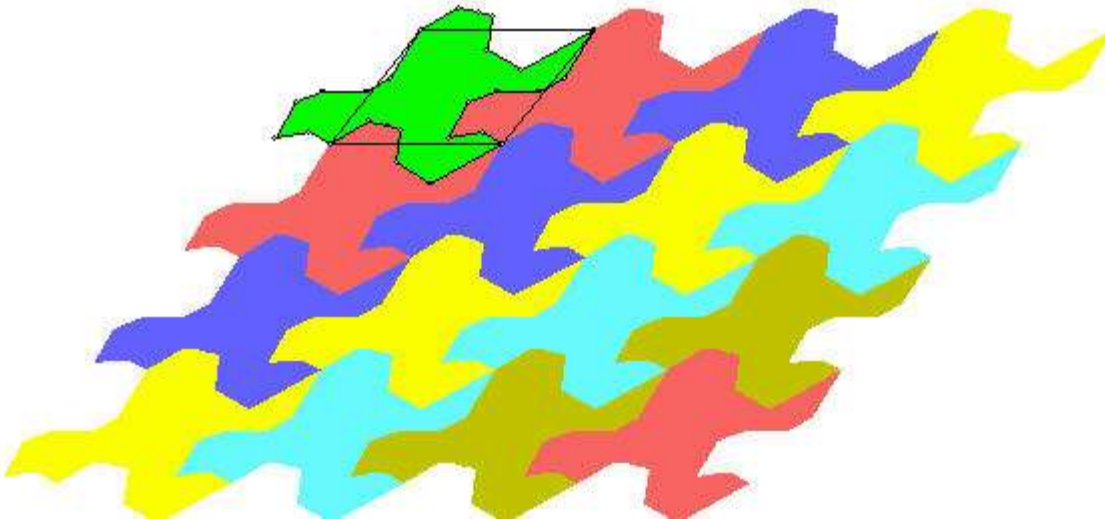
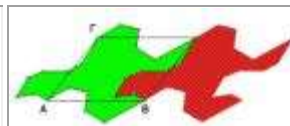
Μεταφέρουμε την μια κατά διάνυσμα AB και την άλλη κατά διάνυσμα ΓΑ.



Κατασκευάζουμε το πολύγωνο που ορίζεται από τις κορυφές της πολυγωνικής γραμμής και χρωματίζουμε.



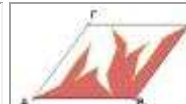
Μεταφέρουμε αρχικά οριζόντια κατά διάνυσμα AB όσες φορές θέλουμε και μετά κατά διάνυσμα ΓΑ. Έτσι θα φθάσουμε στο παρακάτω σχήμα

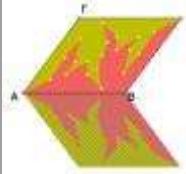


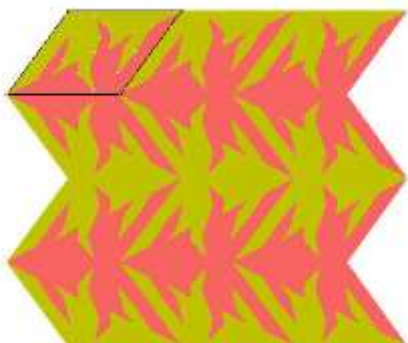
Σχεδιάζουμε μια τεθλασμένη από την κορυφή μέχρι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου








Περιστρέφουμε την τεθλασμένη κατά 180° γύρω από το σημείο τομής των διαγωνίων και στη συνέχεια ορίζουμε το πολύγωνο.

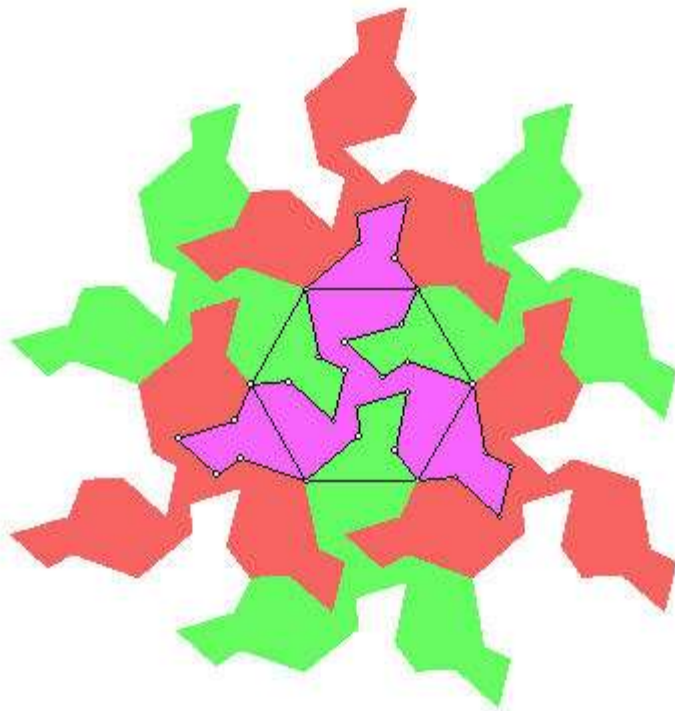


Κάνουμε το ίδιο και για το άλλο πολύγωνο	
Ανακλούμε και τα δύο πολύγωνα κατά την πλευρά AB. Στην συνέχεια μεταφέρουμε οριζόντια κατά διάνυσμα AB όσες φορές θέλουμε και μετά κατά -2 (απόσταση του Γ από την AB) πάλι όσες φορές θέλουμε. Έτσι θα φθάσουμε στο παρακάτω σχήμα	



δ) Έναρξη από ένα κανονικό εξαγώνο

Στην πλευρά ενός κανονικού εξαγώνου κατασκευάζουμε μια τεθλασμένη γραμμή.	
Περιστρέφουμε την τεθλασμένη κατά 120° από την επιλεγμένη κορυφή.	
Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία φθάνουμε στο σχήμα	
Κατασκευάζουμε το πολύγωνο που ορίζεται από την τεθλασμένη γραμμή	
Επιλέγουμε το πολύγωνο και το περιστρέφουμε κατά 120° γύρω από την μια κορυφή του εξαγώνου Επαναλαμβάνοντας το ίδιο για όλες τις κορυφές παίρνουμε το παρακάτω σχήμα	



Παρόμοια, ξεκινώντας από διάφορα άλλα γεωμετρικά σχήματα και εφαρμόζοντας παραπλήσιες τεχνικές μπορούμε να δημιουργήσουμε ανάλογες διακοσμητικές εικόνες.

Οι κατασκευές μπορούν να υλοποιηθούν και με κανόνα & διαβήτη χωρίς την χρήση λογισμικού.



