

«ΠΑΝΤΑ ΚΑΤ' ΑΡΙΘΜΟΝ ΓΙΓΝΟΝΤΑΙ»

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΕΧΝΗ

Αργύρη Παναγιώτα  
Μαθηματικός Ευαγγελική Σχολή Σμύρνης  
Πρέσβειρα Scientix



# Εισαγωγή: Οι πίνακες ζωγραφικής της έκθεσης

Κατηγορίες (ομάδες) ανάλογα με τις γεωμετρικές γνώσεις του αναλυτικού προγράμματος σπουδών.

- Οι πίνακες Μαγικά Τετράγωνα
- Πίνακες που περιέχουν στοιχεία της θεωρίας αριθμών, της πυθαγόρειας φιλοσοφίας, συνδέσεις των μαθηματικών με την πραγματική ζωή



# Εισαγωγή: Οι πίνακες ζωγραφικής της έκθεσης

- Πίνακες που συνδέονται απόλυτα το πρόγραμμα σπουδών της γεωμετρίας

Ιδιότητες τετραπλεύρων/ Πυθαγόρειο Θεώρημα ,

Χαρακτηριστικά στοιχεία του κύκλου/ Μηνίσκοι

- Πίνακες με γεωμετρικές έννοιες που έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης στην ιστορία των μαθηματικών , αλλά και έχουν αποτελέσει την βάση για νέες μαθηματικές ανακαλύψεις και συνδέσεις

Χρυσή τομή/ Φιμπονατσι/ Επαναλαμβανόμενα μοτίβα, γεωμετρική προσέγγιση του απείρου



**Στόχοι :**

**Οι πίνακες ζωγραφικής**

- ✓ **ως αντικείμενο διδασκαλίας για τη μελέτη και αιτιολόγηση ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.**
- ✓ **Διδακτική μεθοδολογία**
- ✓ **Αναγνώριση γεωμετρικών εννοιών και εφαρμογή υπολογιστικών μεθόδων με βάση τους πίνακες ζωγραφικής**
- ✓ **Καλλιέργεια και εξάσκηση ευελιξίας της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών**



# Πίνακες & Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών

1. Ανάλυση & σύνδεση με την διδακτέα ύλη

Προετοιμασία: Δραστηριότητες μικροπειραμάτων και διαδραστικών εφαρμογών του ψηφιακού σχολείου

2. Φύλλο δραστηριοτήτων: Ερωτήσεις και δραστηριότητες πάνω σε κάθε πίνακα προσαρμοσμένες στην διδακτέα ύλη των Μαθηματικών Δημοτικού, Γυμνασίου και Λυκείου

3. Ανοιχτά μαθηματικά προβλήματα & δημιουργικές κατασκευές σχετικές με τις θεματικές ενότητες του κάθε πίνακα



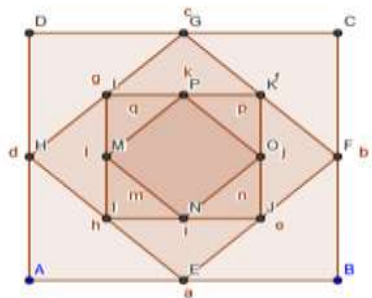
# Πρόταση διδακτικής μεθοδολογικής προσέγγισης



## Γεωμετρικές κατασκευές α) με κανόνα & διαβήτη β) geogebra

- Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- Στην συνέχεια με κορυφές τα μέσα του αρχικού τετραγώνου να κατασκευάσετε ένα δεύτερο τετράγωνο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- Όμοια να κατασκευάσετε ένα νέο τετράγωνο και με κορυφές τα μέσα του δεύτερου τετραγώνου να κατασκευάσετε ένα τρίτο τετράγωνο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- Να επαναλάβετε την διαδικασία τουλάχιστον 5 φορές

### Γεωμετρική κατασκευή τετραγώνων με Geogebra



Σ

# Ερωτήσεις

- Τι παρατηρείτε για τα εμβαδά των σχηματιζόμενων τετραγώνων ;
- Αν η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι 4 , μπορείτε να υπολογίσετε τα εμβαδά των  $E_1, E_2, E_3, \dots$  των σχηματιζόμενων τετραγώνων ;
- Μπορείτε να υπολογίσετε το άθροισμα  $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$ ;



## Ενδεικτική λύση/ Παρατηρήσεις

- Έστω ότι το εμβαδόν του μεγαλύτερου τετραγώνου είναι 1.
- Ποιο είναι το άθροισμα των εμβαδών όλων των τετραγώνων; Προκύπτει το παρακάτω άθροισμα

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

*Μπορεί να αποδειχτεί ότι η τιμή αυτού του αθροίσματος ισούται με 2.  
Ένα άπειρο άθροισμα μπορεί να έχει μια πεπερασμένη τιμή.*

Σημείωση: Οι έννοιες άπειρο πλήθος – πεπερασμένο πλήθος- πεπερασμένη τιμή – άπειρο πλήθος δεν αναλύονται στα μαθηματικά Γυμνασίου και Λυκείου και επιπλέον δεν γίνεται αναφορά αυτών.

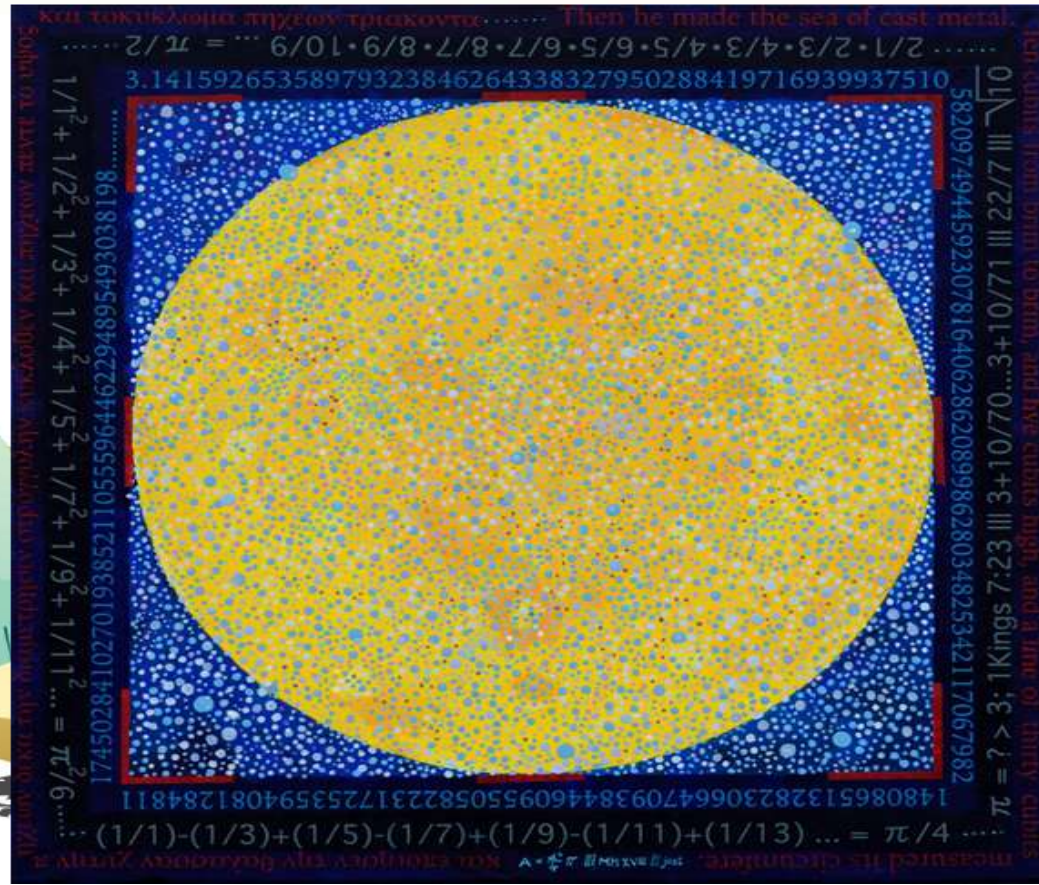


*Ερώτηση: Αν προσθέσουμε άπειρα θετικά στοιχεία ποιο μπορεί να είναι το αποτέλεσμα;*

## Σειρά απείρων όρων με πεπερασμένη τιμή

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \pi^2/6$$

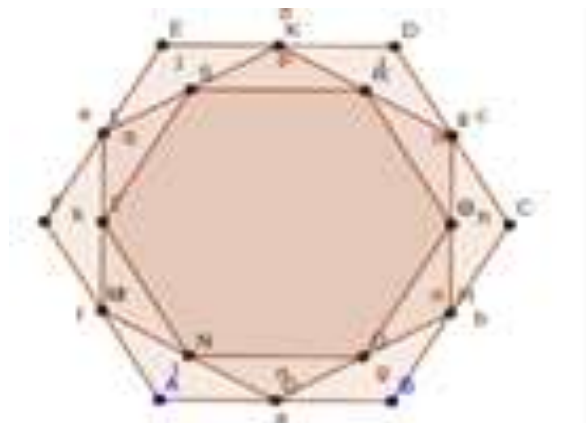
Σύνδεση με τον πίνακα



Η δραστηριότητα μπορεί να ενταχθεί και στην διδακτική ενότητα :

### Κανονικά πολύγωνα της Β Γυμνασίου.

- Να θεωρήσετε τώρα ένα κανονικό εξαγώνο. Πως υπολογίζουμε αλγεβρικά το εμβαδόν του ;
- Στην συνέχεια με κορυφές τα μέσα του αρχικού εξαγώνου να κατασκευάσετε ένα δεύτερο εξαγώνο. Πως υπολογίζουμε το μήκος της πλευράς του δεύτερου εξαγώνου με την βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών ; Να υπολογίσετε πάλι το εμβαδόν του.
- Όμοια να κατασκευάσετε ένα νέο εξαγώνο και με κορυφές τα μέσα του δεύτερου τετραγώνου να κατασκευάσετε ένα τρίτο τετράγωνο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.



# Πρόταση διδακτικής μεθοδολογικής προσέγγισης



## • Φύλλο δραστηριοτήτων

- Ερωτήσεις διερεύνησης :
  - Θεωρήστε ένα τετράγωνο πλευράς 1. Να το διαιρέσετε σε δύο ισεμβαδικά σχήματα. Με ποιο τρόπο μπορεί να γίνει ; Τι είδους σχήματα προκύπτουν ;
  - **Τα ισεμβαδικά είναι και ίσα ;**
  - Να επαναλάβετε την διαδικασία για ένα από τα δύο νέα ισεμβαδικά σχήματα;
  - Το άθροισμα των εμβαδών των νέων σχημάτων με τι είναι ίσο ;
  - Ισχύει το ίδιο και στην περίπτωση όπου το αρχικό τετράγωνο δεν έχει εμβαδόν 1 ;



## Γεωμετρική κατασκευή Geogebra

**Οι διχοτομήσεις μπορούν να υλοποιηθούν με το λογισμικό geogebra αλλά και με κανόνα και διαβήτη**

GeoGebra

Line

- f:  $5.12x + 5.16y = 45.62$
- k:  $271.6x + 1.06y = 658.06$

Point

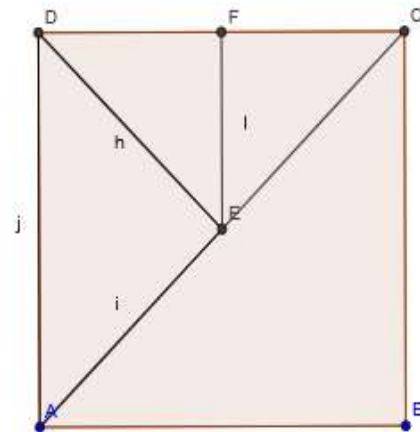
- A = (-0.16, 3.88)
- B = (4.98, 3.9)
- E = (2.4, 6.46)
- F = (2.39, 9.03)

Polygon

- πολύγ.1 = 26.42

Segment

- a = 5.14



# Επέκταση

- Καλλιτεχνικές δημιουργίες με όμοια ή ίσα γεωμετρικά σχήματα που ακολουθούν μία επαναλαμβανόμενη διαδικασία.



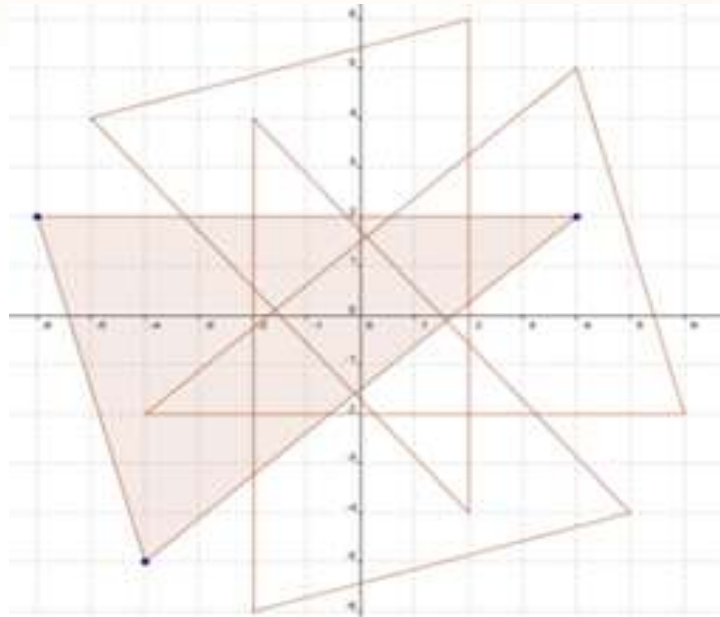
[https://www.artfulmaths.com/uploads/5/2/0/5/52054835/curves\\_of\\_pursuit.pptx](https://www.artfulmaths.com/uploads/5/2/0/5/52054835/curves_of_pursuit.pptx)

**Σημείωση : Γεωμετρικές κατασκευές με κεντρική έννοια  
«επαναλαμβανόμενη διαδικασία»**



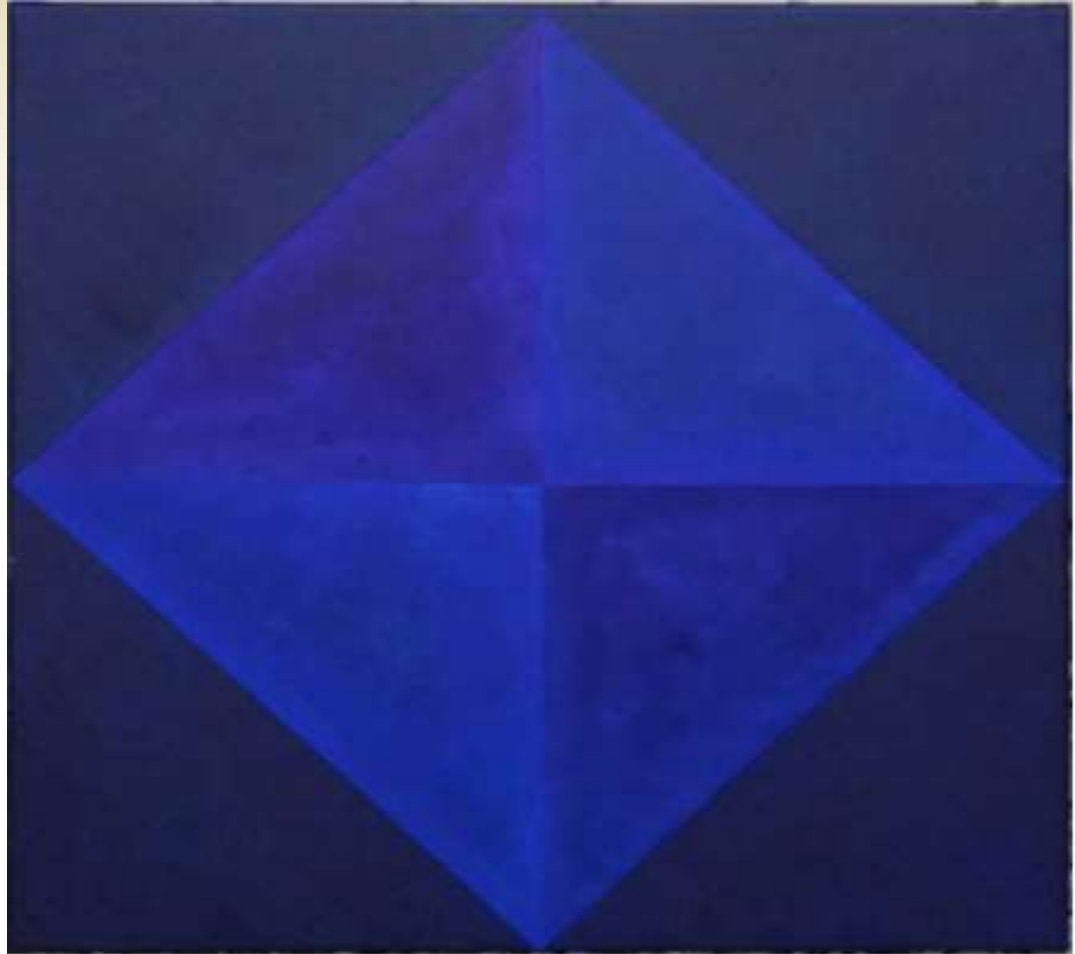
## Ελκυστικές περιστροφές

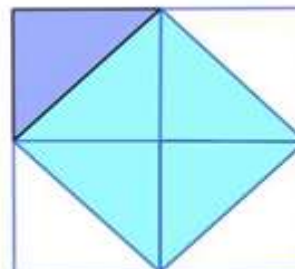
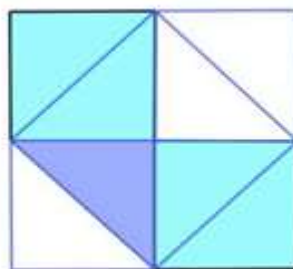
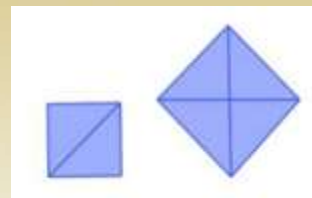
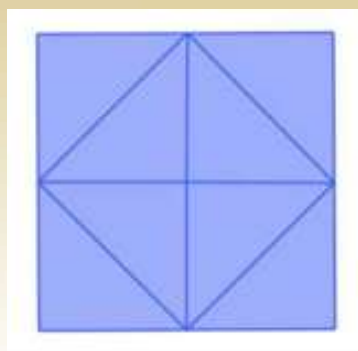
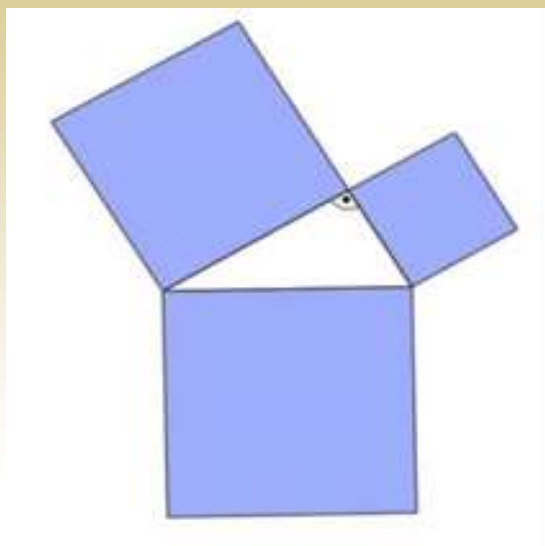
- Σχεδιάζουμε σκαληνό τρίγωνο. Αν το τρίγωνο αυτό περιστρεφεί γύρω από κάποιο σημείο του επιπέδου, το νέο τρίγωνο είναι όμοιο και ίσο με το αρχικό ;
- Δημιουργήστε μερικές από τις δικές σας εικόνες περιστρέφοντας ένα σχήμα μέσα από πολλαπλάσια  $90^{\circ}$



# «Ιδιότητες τετραπλεύρων / Σύγκριση τριγώνων / Πυθαγόρειο Θεώρημα Θεμελιώδη θεωρήματα / Προτάσεις»

«Κρυμμένος  
πυθαγόρας»





Απόδειξη πυθαγορείου Θεωρήματος κατά *Eugen Jost*

## Φύλλο δραστηριοτήτων

- Υπάρχουν ίσα τρίγωνα ; Να αιτιολογήσετε
- Να αποδείξετε το σχηματιζόμενο τετράπλευρο που προκύπτει από τα μέσα των πλευρών τετραγώνου είναι ρόμβος.
- Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι  $a$ , μπορείτε να βρείτε την περίμετρο του σχηματιζόμενου ρόμβου; Ποιο βασικό θεώρημα θα χρησιμοποιήσετε;
- Αν θεωρήσουμε τα μέσα των πλευρών του ρόμβου, τι είδους γεωμετρικό σχήμα προκύπτει. Να αιτιολογήστε.



Μπορείτε να διερευνήσετε άλλες περιπτώσεις σχηματιζόμενων τετραπλεύρων από το αρχικό τετράγωνο.

- Σχεδιάζοντας ορθογώνια

- Ιδιότητες Ρόμβου

- Ιδιότητες Ρόμβου

Φωτόδεντρο  
Μαθησιακό Αντικείμενο

Τι συνεισφέρει σχετικά στη μάθηση Γεωμετρία Λυκείου. Διατε παραμένουν πληροφορίες στη σελίδα του προγράμματος.

```
; Διαφορετικά, οι προμήθειες, να επιλεγούν, ώστε  
η διαδικασία να κατασκευάζει πάντα  
ρόμβους;  
; Κάνε κλικ στον πάπυρο, για να  
διαβάσεις τις οδηγίες.  
;  
ΓΙΑ ρόμβος :α :β :φ  
επανάλαβε 2[μ :α δ :φ  
μ :β δ 180-φ]  
ΤΕΛΟΣ  
σφγ  
ρόμβος 120 120 40
```

ρόμβος defined.

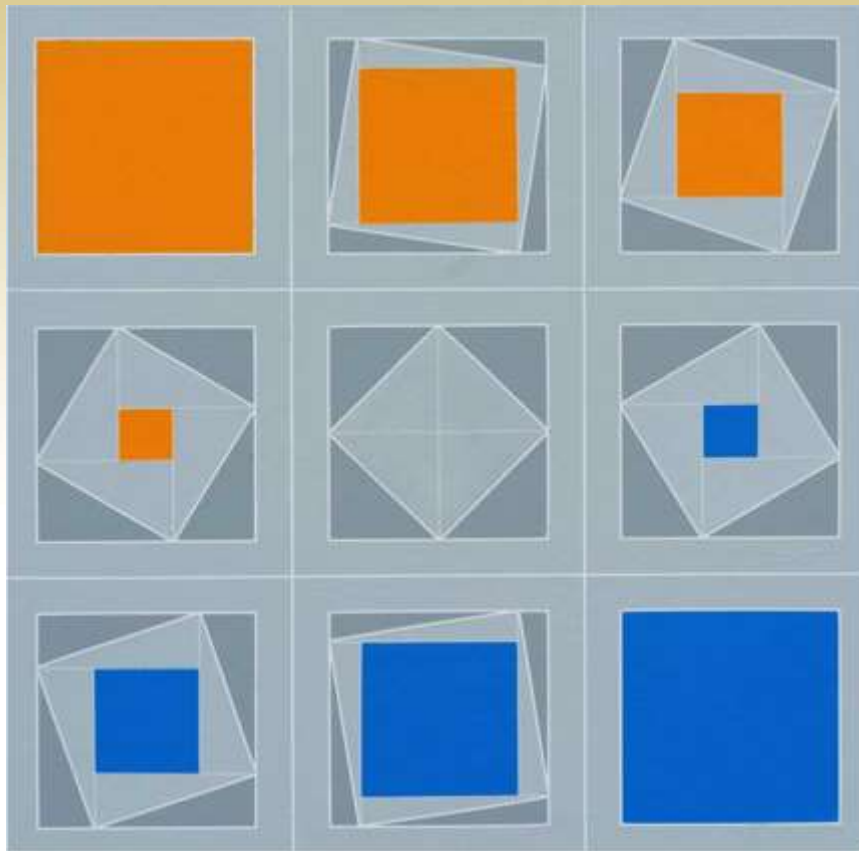


- Ασκήσεις σχολικού βιβλίου Γεωμετρία Α Λυκείου
- **Ασκήσεις εμπέδωσης σχολικό βιβλίο Α Λυκείου (5.4)**
- 5. Δίνεται ρόμβος  $ΑΒΓΔ$  με κέντρο  $Ο$ . Παίρνουμε δύο σημεία  $Ε$  και  $Ζ$  της  $ΑΓ$ , ώστε  $ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ$ . Να αποδείξετε ότι το  $ΔΕΒΖ$  είναι τετράγωνο.
- 6. Δίνεται τετράγωνο  $ΑΒΓΔ$ . Στις πλευρές  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$  και  $ΔΑ$  παίρνουμε σημεία  $Κ$ ,  $Λ$ ,  $Μ$  και  $Ν$  αντίστοιχα τέτοια, ώστε  $ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ$ . Να αποδείξετε ότι το  $ΚΛΜΝ$  είναι τετράγωνο.
- **Αποδεικτικές ασκήσεις σχολικό βιβλίο Α Λυκείου (5.4)**
- 2. Η σχέση δύο καθέτων τμημάτων που έχουν άκρα τις απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου



# Το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος





Κάθε ένα από τα τετράγωνα  
του παραπάνω πίνακα  
αποτελεί μία ή και  
περισσότερες δραστηριότητες-  
ασκήσεις για τις ιδιότητες των  
τετραπλεύρων.



## Φύλλο δραστηριοτήτων

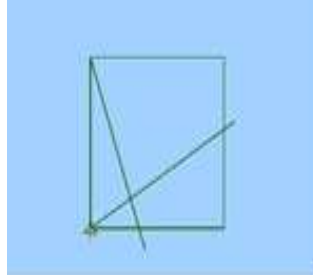
- Να αιτιολογήσετε ότι δύο τετράγωνα είναι πάντα όμοια.
- Ισχύει το ίδιο για τα ορθογώνια ή και για τους ρόμβους ή και για τα παραλληλόγραμμα
- Έστω ότι η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι  $a$ . Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των δύο τετραγώνων στο παρακάτω μέρος του πίνακα.
- Διερεύνηση της έννοιας του ομοιόθετου (\*\*)
- Από το Ομοιόθετο πενταγώνου να κατασκευάσετε το ομοιόθετο του τετραγώνου (\*\*)





Στις πλευρές  $AB$  και  $BΓ$ , τετραγώνου  $ABΓΔ$  παίρνουμε σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, ώστε  $AE = BZ$ . Να αποδείξετε ότι  
i)  $AZ = ΔE$ , ii)  $AZ \perp ΔE$ .

*Αποδεικτική άσκηση 2 (5.4) Α Λυκείου*

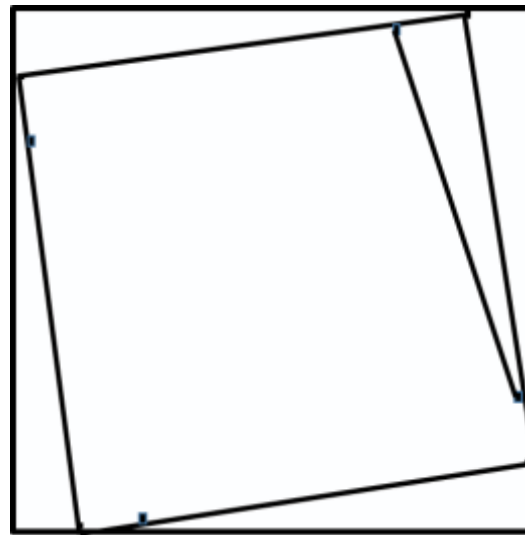
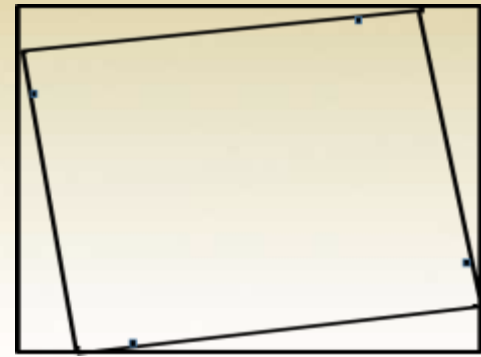
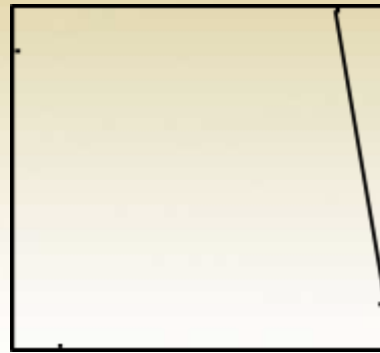


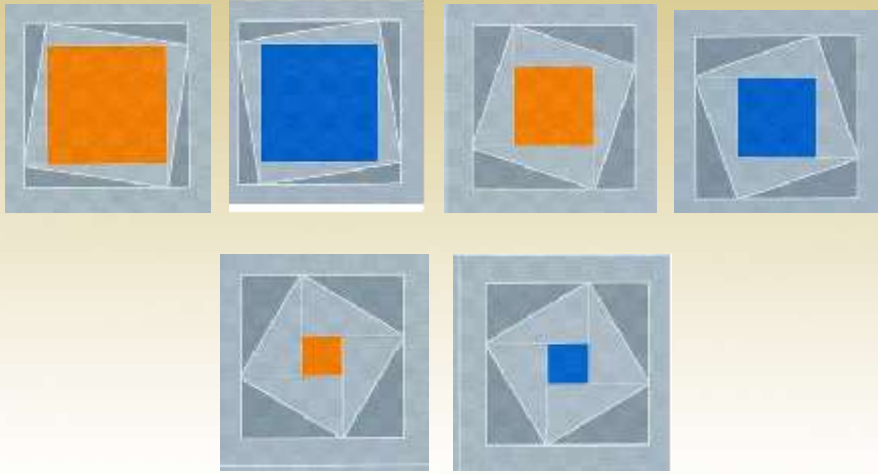
## Ασκήσεις σχολικού εγχειριδίου

- Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ, να αποδείξετε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος. (αποδεικτική άσκηση 3, 5.5, Α Λυκείου)
- Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ και Ν αντίστοιχα τέτοια, ώστε  $AK = BL = GM = DN$ . Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο (εμπέδωσης άσκηση 6, 5.5, Α Λυκείου)



# Γεωμετρική κατασκευή



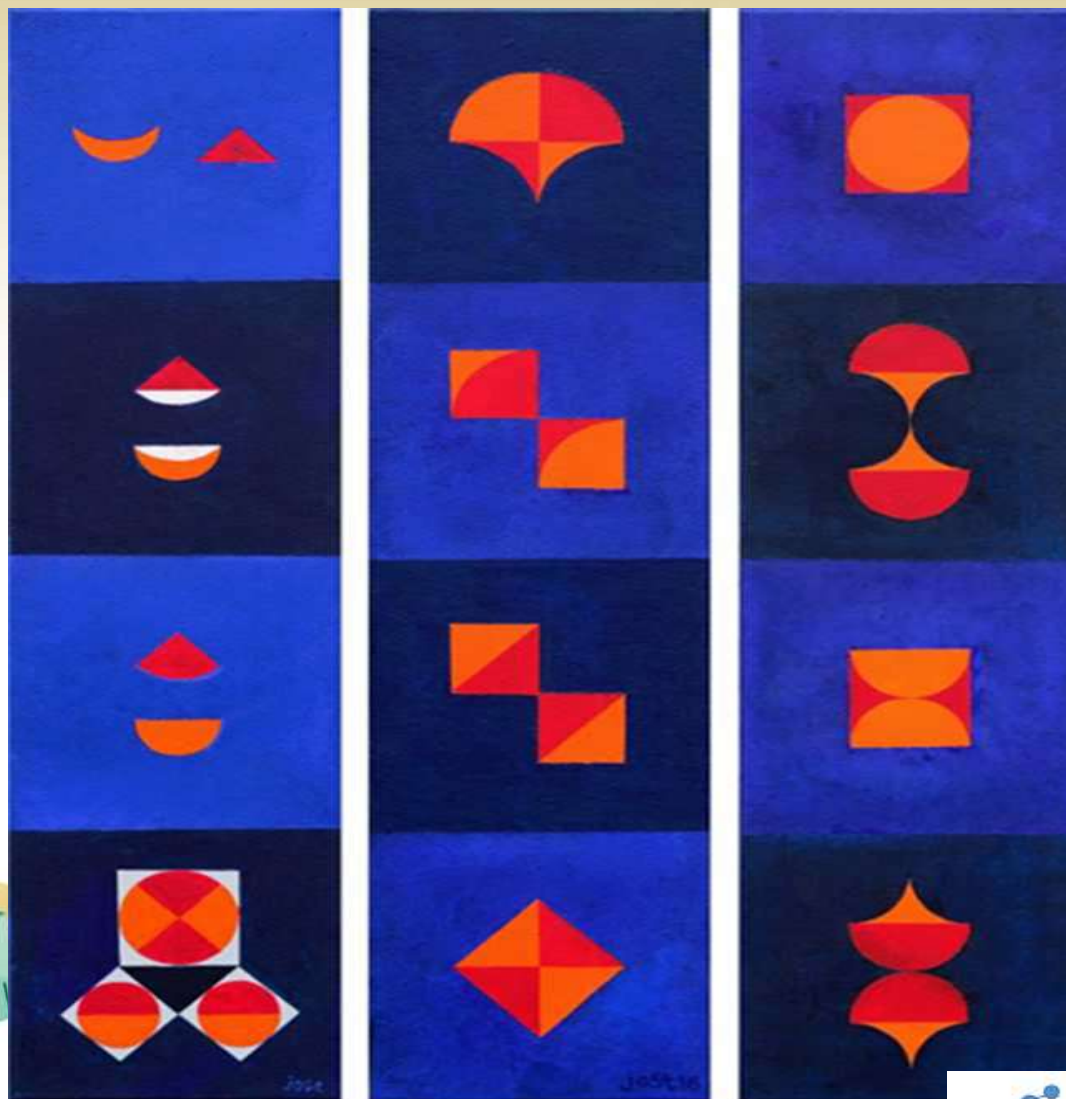


- ο Να αιτιολογήσετε την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων στα παραπάνω ζεύγη.
- ο Να επιλέξετε μία εικόνα και να θεωρήσετε ότι η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι  $a$ . Να προχωρήσετε σταδιακά και με διαδοχικά στάδια σε υπολογισμούς ώστε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου (3ο κατά σειρά) που σχηματίζεται.



## Πρόταση διδασκαλίας: Χαρακτηριστικά κύκλου

- Τι είδους γεωμετρικά σχήματα αναγνωρίζετε ;



## Προετοιμασία:

### Μηνίσκοι/ τετραγωνισμός κύκλου/ λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας/

#### Δραστηριότητες [φωτόδεντρο του ψηφιακού σχολείου](#)

- [Μικροπείραμα : Μηνίσκοι του Ιπποκράτη](#)

- [Τετραγωνισμός Μηνίσκου](#)

- [Μικροπείραμα για την εμπλοκή των μαθητών με τον υπολογισμό των εμβαδών των μηνίσκων με χορδές τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και τη σύγκριση του αθροίσματος των εμβαδών τους με το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου.](#)

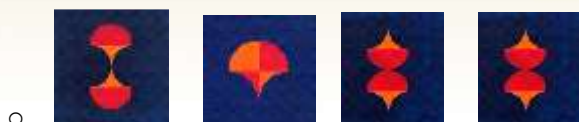


## Φύλλο δραστηριοτήτων : Διερεύνηση

- Μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφανειας αν από το τετράγωνο αποκόψουμε τα δύο σχήματα που υπάρχουν στο εσωτερικό του.
- Ποιες επιπλέον υποθέσεις αρκεί να διατυπώσετε ;
- Υπόδειξη : Να θεωρήσετε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου  $a$ .



- Να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για τα ακόλουθα

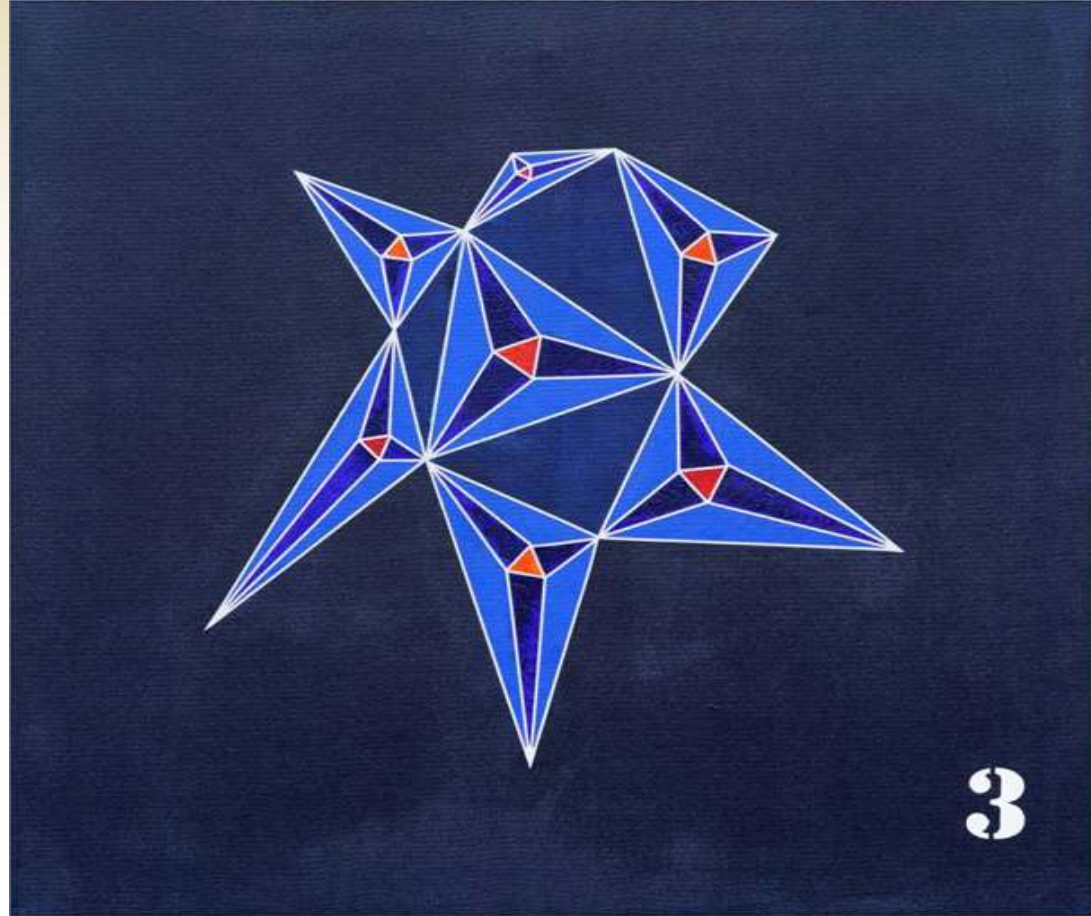


- Επέκταση
- Να διερευνηθούν τα «Άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας» (εκτός από τον τετραγωνισμό του κύκλου)
- Παρουσίαση: Άλυτα προβλήματα των μαθηματικών



## Το θεώρημα Morley για την τριχοτόμηση γωνίας

Σύνδεση με τον πίνακα:



# Πρόταση διδασκαλίας: ο αριθμός $\pi$

1.414213562373095  
04880168872420969  
80785696718753769  
48073176679737990  
73247846210703885  
03875343276415727  
35013846230912297  
02492483605585073  
72126441214970999  
35831413222665927  
50559275579995050  
11527820605714701



## Φύλλο δραστηριοτήτων

- Να μεταβάλλεται δυναμικά την ακτίνα του κύκλου: <https://ggbm.at/vqv8vqv4>
- Να κατασκευάσετε πίνακα τιμών για το μήκος του κύκλου που προκύπτει από την αντίστοιχη τιμή της διαμέτρου :

Μήκος κύκλου					
Διάμετρος					
Μήκος κύκλου/Διάμετρος					

- Τι παρατηρείται για τον λόγο Μήκος κύκλου/Διάμετρος ;
- Μήπως ο αριθμός αυτός εμφανίζεται στο πίνακα ;





## Η έκθεση των Μαθηματικών στην σχολική τάξη

- <http://portal.opendiscoveryspace.eu/en/community/ekthesi-mathimatikon-ola-einai-arithmos-851239>

