

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Γ ΤΑΞΗ
ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΑΤΡΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΔΥΟ (2)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 8

A2. i. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

ii. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στη κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A \cap B) = 0$. τότε τα A, B είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 2

ii. Για κάθε $x > 0$, ισχύει $(\ln x)' = -\frac{1}{x}$

Μονάδες 2

iii. Αν σε μια κατανομή συχνοτήτων ισχύει ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι μικρότερη από την διάμεσο δ του δείγματος τότε η κατανομή παρουσιάζει θετική ασυμμετρία.

Μονάδες 2

iv. Σε μια κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$

Μονάδες 2

v. Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Οι σχετικές αθροιστικές συχνότητες $F_i\%$ των τιμών x_i , με $i=1,2,\dots, \kappa$, ενός δείγματος μεγέθους n ($\kappa \leq n$) μιας μεταβλητής X, δίνονται από τον τύπο $F_i\% = 2i^2 + 10i$ με $i=1, 2, \dots, \kappa$.

B1. Να βρείτε τις $f_1\%$, $f_2\%$ και να δείξετε ότι $f_i\% = 4i + 8$

Μονάδες 6

B2. Να δείξετε ότι το πλήθος των τιμών x_i των παρατηρήσεων είναι 5.

Μονάδες 5

B3. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της παρατήρησης με τιμή x_3 είναι 24, να βρείτε το μέγεθος του δείγματος n και να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

Μονάδες 8

B4. Αν $n=50$ και η εφαπτομένη ϵ στη καμπύλη της $f(x) = ax^2 - bx + 8$ στο σημείο της $A\left(\frac{v_1}{3}, \frac{v_2}{2}\right)$ είναι κάθετη προς την ευθεία $\gamma = -\frac{1}{2}x - 7$, να βρείτε τα α, β .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ για τα στοιχεία του οποίου ισχύει η σχέση:

$$\omega_k = k^2 + k + 1, \text{ για } k = 1, 2, \dots, n$$

Γ1. Αν η διάμεσος των τιμών του δειγματικού χώρου Ω ισούται με 17 να αποδείξετε ότι $n=6$.

Μονάδες 9

Γ2. Αν επιπλέον για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω ισχύουν οι σχέσεις:

$$P(\omega_k) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_k+1} & \text{για } k = 1, 2 \\ \frac{1}{\omega_k+3} & \text{για } k = 3, 4 \end{cases} \quad \text{και} \quad P(\omega_5) = \frac{1}{48} \quad \text{να αποδείξετε ότι } P(\omega_6) = \frac{1}{2}.$$

Μονάδες 6

Γ3. Δίνεται ακόμη η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{169}{4}x + 2015, x \in \mathbb{R}$ και τα ενδεχόμενα A, B όπου $A = \{\lambda \in \Omega / \text{η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της } C_f \text{ δεν είναι παράλληλη στον άξονα } x'x\}$ και $B = \{\mu \in \Omega / \text{η διάμεσος των παρατηρήσεων } 3, 7, 2\mu, \mu+1, \mu+7 \text{ να είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή τους}\}$

i. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{3}{8}$ και $P(B) = \frac{9}{16}$

Μονάδες 5

ii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου να μην συμβεί μόνο ένα από τα A, B

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση g ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x + \sqrt{x+12})g(x) + 7 = -\frac{7}{3}x$ και η συνάρτηση f με $f(x) = (\alpha x + 2) \cdot e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0 = -\frac{a+2}{a}$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f γίνεται μέγιστη όταν $a = g(-3)$.

Μονάδες 6

Δ3. Έστω ε η εφαπτομένη στο σημείο A(0, f(0)) της γραφικής παράστασης της f και σημεία της ε με τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 τα οποία έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s_x .

(i) Να βρείτε τις σχέσεις που δίνουν την μέση τιμή $\bar{y}$ και τη τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Μονάδες 4

(ii) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των τετμημένων των σημείων παρουσιάζει μικρότερη ομοιογένεια από το δείγμα των τεταγμένων τους.

Μονάδες 5

Δ4. Δίνεται επιπλέον ότι οι τετμημένες των σημείων του ερ. Γ3 είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Βρείτε την ελάχιστη τιμή του x_1 για την οποία το δείγμα x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Δίνονται: $\sqrt{2} = 1,41, \quad \sqrt{10} = 3,16$ και $s^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n t_i)^2}{n} \right]$

Καλή Επιτυχία!!!!