Πίνακες Έκθεσης Μαθηματικών

& Γεωμετρικά Προβλήματα

Ερευνητική Εργασία Α1 Λυκείου Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Αγγελόπουλος Διονύσιος, Αγωγιάτης Δημήτριος, Αποστολάκος Παναγιώτης, Βακάλης Αλέξανδρος, Βασιλείου Νεκτάριος, Βελή Δανάη, Βέλης Γεώργιος, Βεργαδής Χαράλαμπος, Βλάχος Ιωάννης, Βλάχος Παναγιώτης, Γιάνναρη Σοφία, Γιαννουλάτου Μαρία, Δαρλής Αντώνιος, Δαφέρμου Μαρία, Δέλλιου Αλεξάνδρα, Διαμαντής Θεόδωρος, Διονυσόπουλος Αριστείδης, Δοντάς Ιωάννης, Δριμή Άννα, Δίπλα Δέσποινα, Εμμανουήλ Δημήτριος, Ζιώγα Βασιλική, Ζώρα Γεωργία, Ηλιοπούλου-Τσιμαράτου Ανδριάνα, Θεοδωράκη Ευθαλία, Καζαντζόπουλος Κωνσταντίνος, Καραογλάνης Ιγνάτιος.

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Αργύρη Παναγιώτα, Μαθηματικός.

Η μοναδική έκθεση Μαθηματικών « Όλα είναι αριθμός» («Everything is number»)[1]του Eugen Jost μας έδωσε την ευκαιρία στα πλαίσια των δημιουργικών ερευνητικών εργασιών και του μαθήματος της Γεωμετρίας να κατανοήσουμε γεωμετρικές έννοιες και θεωρήματα μέσα από την ομορφιά των πινάκων ζωγραφικής της έκθεσης.[2]

Μακριά από την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας, όπου την παράδοση της θεωρίας και των αποδείξεων των θεωρημάτων ή των προτάσεων της Γεωμετρίας ακολουθεί η επίλυση ασκήσεων γίναμε οι ίδιοι δημιουργοί και λύτες γεωμετρικών προβλημάτων με βάση τις γεωμετρικές έννοιες που παρατηρήσαμε ότι αποτυπώνονται στους πίνακες ζωγραφικής ανακαλώντας τις προηγούμενες γνώσεις μας.

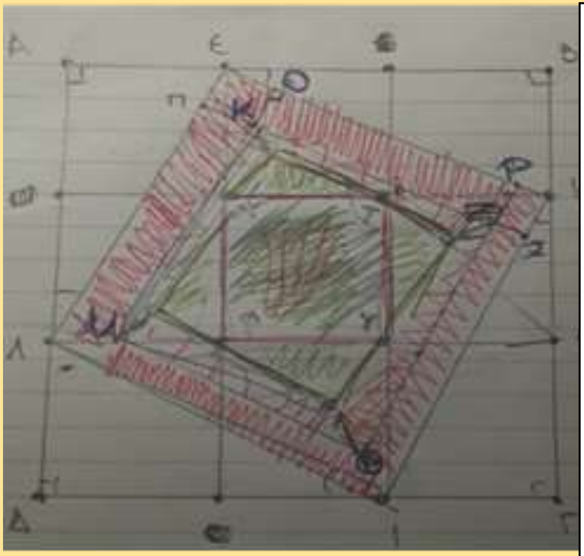
Γεωμετρικά προβλήματα στους πίνακες ζωγραφικής της έκθεσης.

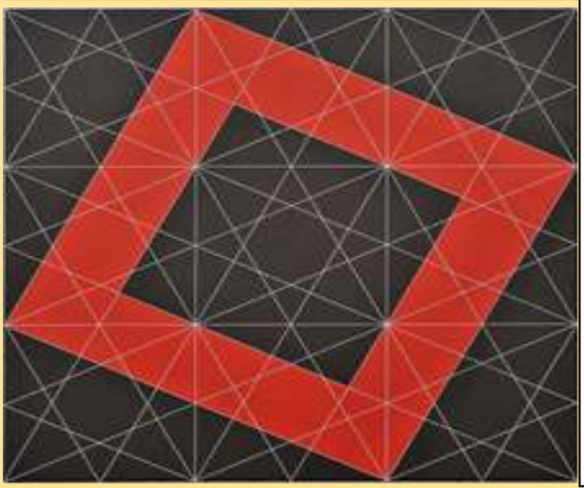
[1] http://creations2018.ea.gr/exhibition/

Η έκθεση διοργανώθηκε από την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία και την Ελληνογερμανική Αγωγή σε συνεργασία με το Τμήμα Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Πανεπιστημίου του Bayreuth.

[2] Οι πίνακες του **Eugen Jost** έχουν τίτλους όπως “Hardy’s Taxi”, “Pisa”, “Cambridge, Bern”, “A “Walk with Mr. Euler”, “Girasole” and “Mediterranean Geometry”. Στην πραγματικότητα, το στυλ τους είναι διαφορετικό αλλά έχουν ένα κοινό υπόβαθρο που ίσως κάποιος δε θα περίμενε πίσω από αυτούς τους τίτλους: τα μαθηματικά. Οι πίνακες αφηγούνται ιστορίες και προξενούν ενδιαφέρον για μαθηματικά αποτελέσματα και σχέσεις όπως ακριβώς για τα πρόσωπα που εμπλέκονται σε αυτές.

1)



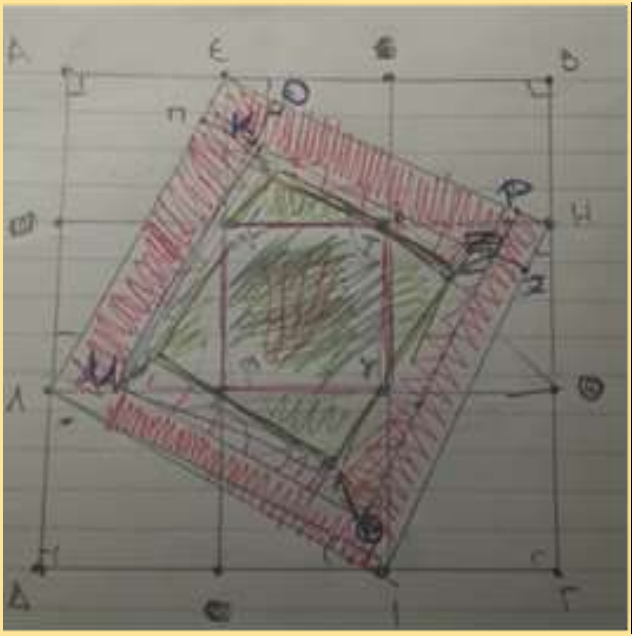


Σε ένα οικοδομικό τετράγωνο [ΑΒΓΔ], βρίσκεται το κτήριο της Μαθηματικής Εταιρείας [ΧΤΥΦ].

Γύρω από το κτήριο βρίσκεται ένας κύπος [ΕΛΙΗ].

Δίνεται ότι 2ΑΕ=ΕΒ, 2ΒΗ=ΗΓ, 2ΓΙ=ΙΔ, 2ΔΛ=ΛΑ και γωνία ΑΛΕ= γωνία ΛΙΔ= γωνία ΙΗΓ= γωνία ΒΕΗ

I. Να αποδείξετε ότι ΕΛΙΗ είναι τετράγωνο.
II. Να βρεθεί το (ΚΖΘΜ).
III. Να βρεθεί το (ΧΤΥΦ).



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

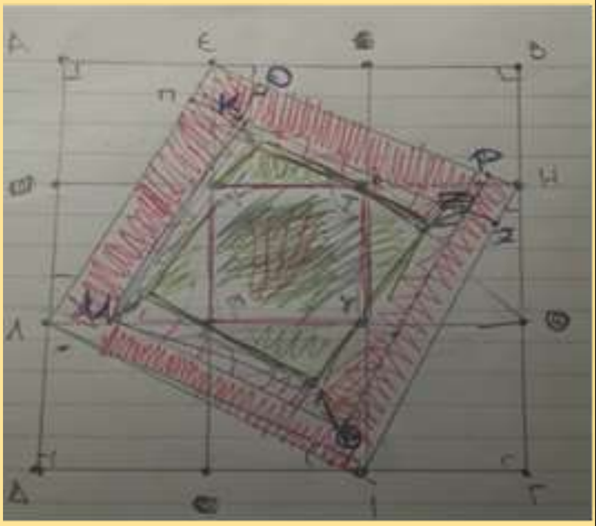
ΟΚ= $\frac{\alpha}{2}$, 2ΑΕ=ΕΒ, 2ΒΗ=ΗΓ, 2ΓΙ=ΙΔ, 2ΔΛ=ΛΑ, 2ΜΦ=ΦΘ (1), 2ΘΥ=ΥΖ (2), 2ΖΤ=ΤΚ (3), 2ΚΧ=ΧΜ (4),

ΧΦΥΤ: τετράγωνο (5),

ΑΒΓΔ: τετράγωνο,

ΚΖΘΜ: τετράγωνο (6)

ΟΚ=ΟΠ=ΖΡ=ΖΣ, γωνία ΑΛΕ= γωνία ΛΙΔ= γωνία ΙΗΓ= γωνία ΒΕΗ, ΑΒ=3$\sqrt{\alpha}$



ΛΥΣΗ

ΑΒ=3$\sqrt{\alpha}$ ⇒ΛΙ=5α (από Πυθαγόρειο Θεώρημα)

ΑΒΓΔ τετράγωνο⇒ΛΙ=ΗΙ=ΗΕ=ΕΛ

Άρα ΜΘ=ΛΙ-2ΟΚ⇔ΜΘ=5α- 2$\frac{\alpha}{2}$= 4α

Αφού ΜΘΖΚ: τετράγωνο,

τα τρίγωνα ΜΦΧ, ΦΘΥ, ΥΙΖ, ΚΧΤ θα είναι ίσα καθώς έχουν τρείς ίσες πλευρές (από (1),(2),(3),(4),(5),(6))

Άρα $X\Phi^2 \simeq 1{,}6\alpha^2 + 2{,}3\alpha^2$

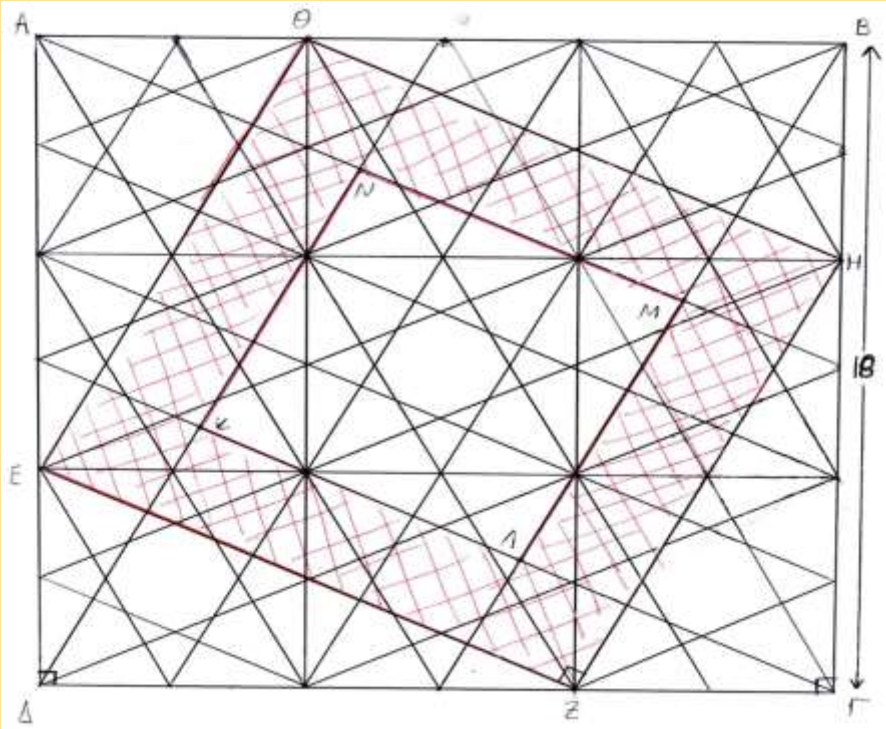
$\Leftrightarrow\ X\Phi^2 \simeq 15{,}3\alpha^2$

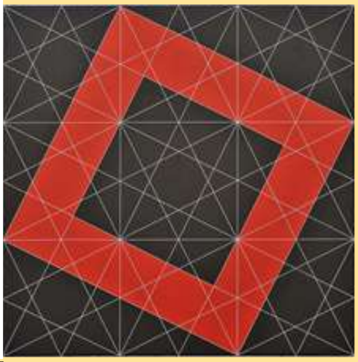
$\Leftrightarrow\ X\Phi \simeq \sqrt{15{,}3\alpha^2}$

$\Leftrightarrow\ X\Phi \simeq 3{,}9\alpha$

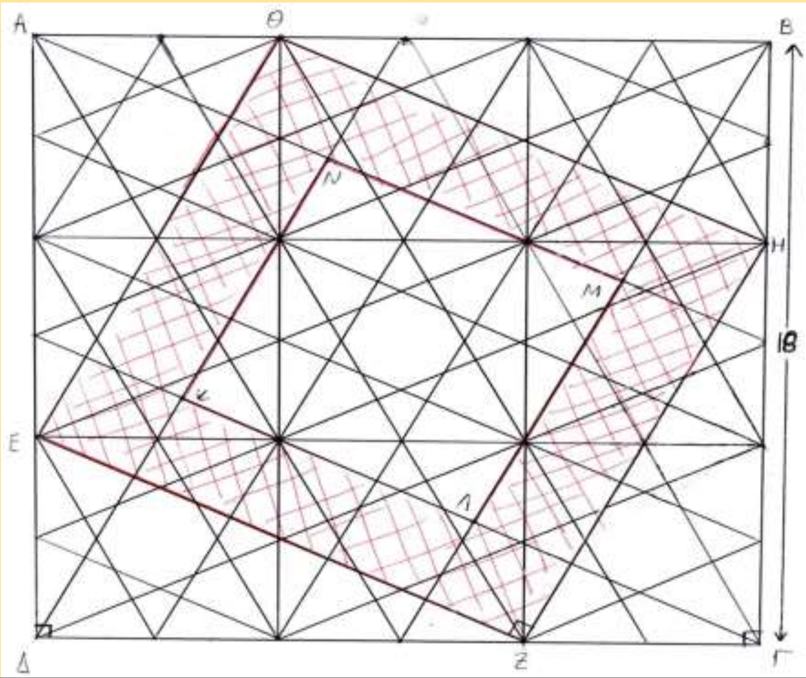
Άρα (ΧΦΥΤ)$\simeq 15{,}3\alpha^2$

2)





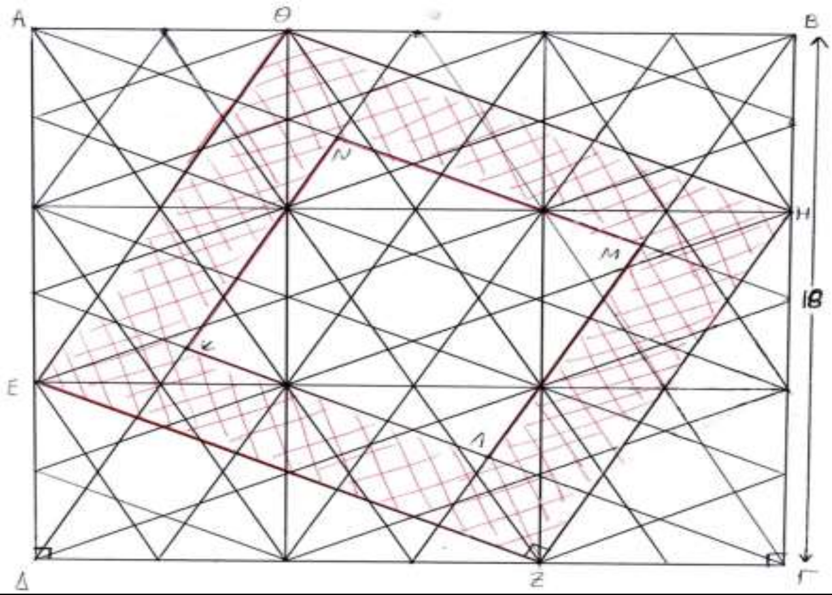
Αν η πλευρά του πίνακα είναι 18, να βρεθεί ποιο ποσοστό του πίνακα καλύπτει το κόκκινο σκιασμένο εμβαδόν.



Αφού **ΑΔ=18** και **ΔΕ=**$\frac{1}{3}$ **ΑΔ**, θα ισχύει ότι **ΔΕ=6**. Επίσης αφού **ΔΓ=18** και **ΔΖ=**$\frac{2}{3}$ **ΔΓ**, ισχύει ότι **ΔΖ=12**.

Άρα εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο **ΔΕΖ**, έχουμε ότι **ΕΖ=**$\sqrt{\text{ΕΔ}^2+\text{ΔΖ}^2}$ **=**$\sqrt{6^2+12^2}$ **=**$\sqrt{36+144}$ **=**$\sqrt{180}$ **=**$2\sqrt{45}$**.**

Τα τρίγωνα **ΕΔΖ**, **ΖΓΗ** έχουν **ΕΔ=ΖΓ=6**, **ΔΖ=ΓΗ=12** και είναι ορθογώνια, άρα θα είναι ίσα. Άρα **<u>ΕΖ=ΖΗ</u>** και επίσης οι γωνίες **ΕΖΔ+ΓΖΗ=ΖΗΓ+ΓΖΗ=90.** Άρα και η γωνία **ΕΖΗ=180-90=90**. Συμμετρικά δείχνουμε και ότι **ΕΖ=ΖΗ=ΗΘ=ΕΘ** και ότι όλες οι γωνίες **ΕΖΗΘ** είναι ορθές.



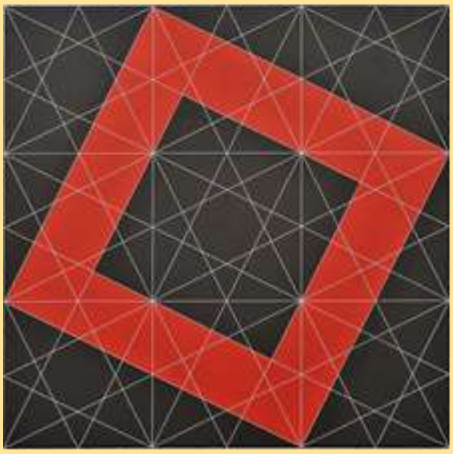
Συμμετρικά δείχνουμε και ότι **ΕΖ=ΖΗ=ΗΘ=ΕΘ** και ότι όλες οι γωνίες **ΕΖΗΘ** είναι ορθές. Άρα το **ΕΖΗΘ** θα είναι τετράγωνο.

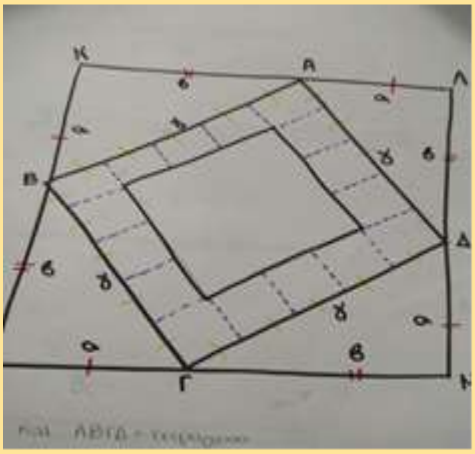
Συνεπώς το εμβαδόν του τετραγώνου **ΕΖΗΘ=**EZ^2 **=**$(2\sqrt{45})^2$ **=180**.

Όμως για να βρούμε το εμβαδόν της κόκκινης επιφάνειας πρέπει να αφαιρέσουμε και το εμβαδόν του **ΚΛΜΝ**. Με παρόμοιο τρόπο με πριν δείχνουμε πως και το **ΚΛΜΝ** είναι τετράγωνο. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $\mathrm{K\Lambda} = \frac{3}{5}\mathrm{EZ}$. Άρα **ΚΛ=**$\frac{3}{5}2\sqrt{45}$ **=**$\frac{6}{5}\sqrt{45}$. Άρα

(**ΚΛΜΝ**)=$\mathrm{K\Lambda}^2$ = $(\frac{6}{5}\sqrt{45})^2$ =$\frac{36}{25}45 = 64{,}8$. Άρα το κόκκινο εμβαδόν θα είναι (**ΕΖΗΘ**)-(**ΚΛΜΝ**)=**180-64,8=115,2**. Άρα ο λόγος του κόκκινου χωρίου προς όλο το τετράγωνο θα είναι ίσος με $\frac{115{,}2}{18^2}$ =**0,35=35%**

3)



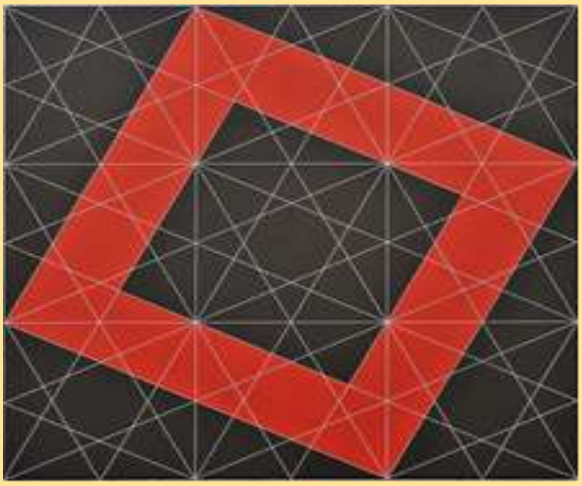


ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Έστω ΚΛΜΝ τετράγωνο. ΑΛ=α και ΚΑ=β και ΑΒ=γ

Αν $α=[(-2)^2-2^0-3^0+1]+1^0$ και $β=2α$

1.Να αποδείξετε ότι γ είναι άρρητος. Τι συμπαιρένετε για την γεωμετρική κατασκευή του τετραγώνου ΑΒΓΔ ;

2. Να βρείτε το εμβαδόν του ΒΝΓ και να αιτιολογησετε γιατί ΚΑΒ,ΑΛΔ,ΔΜΓ και ΒΝΓ είναι ίσα



Ο μικρός Ορφέας έχει μια τετράγωνη χαρτοπετσέτα και προσπαθεί να αποδείξει το Πυθαγόρειο θεώρημα. Στην επιφάνειά της σχεδιάζει ένα κόκκινο τετράγωνο πλευράς c. Γύρω του σχηματίζονται 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Πως θα το αποδείξει;

Λύση:

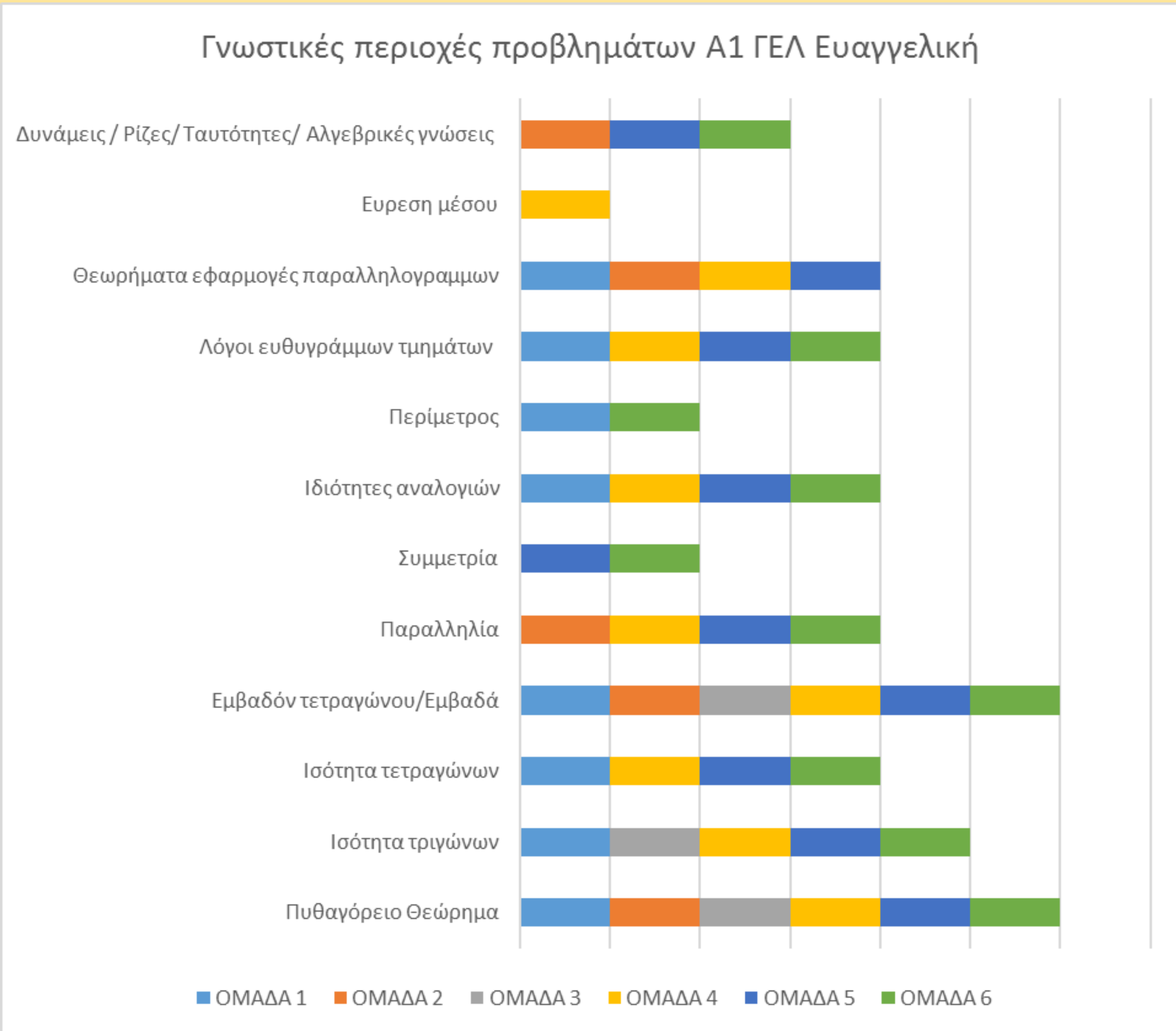
Τα 4 τρίγωνα σχηματίζουν το μεγάλο τετράγωνο πλευράς (a+b). Το εμβαδόν του γράφεται με 2 τρόπους:

(1): $(a+b)^2$

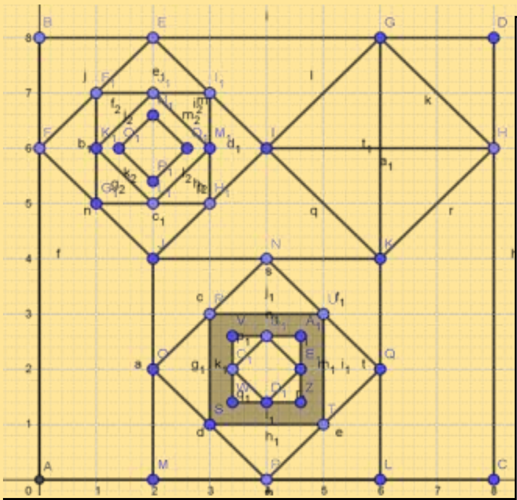
(2): $(4ab) / 2 + c^2$

Έχουμε ότι (1) = (2) => $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Ο πίνακας των "πολλών γεωμετρικών εννοιών"

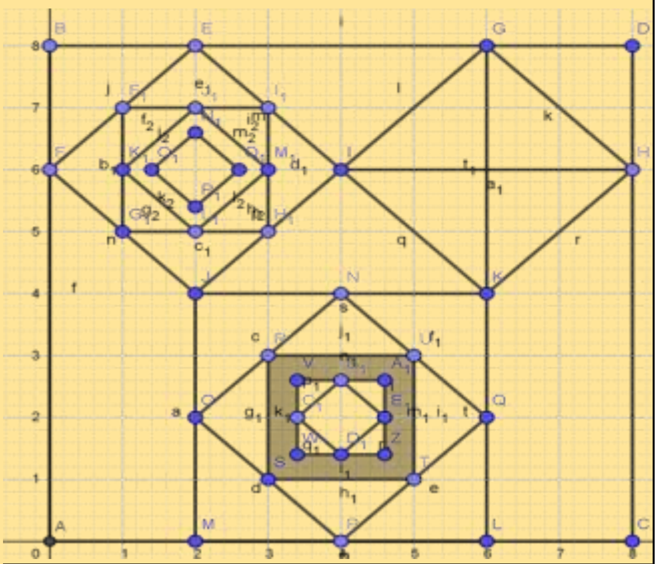


1)



Ο δήμαρχος θέλει να αναδασώσει την πλατεία του χωριού η οποία είναι χωρισμένη σε γεωμετρικά σχήματα. Για να δει πόσα δέντρα χωράνε πρέπει να ξέρει το συνολικό εμβαδό της πλατείας. Επειδή οι φόροι δεν είναι αρκετοί για να αγοράσει αρκετά μεγάλο μέτρο, πρέπει να χρησιμοποιήσει γεωμετρικούς υπολογισμούς.

Ξέρει ότι το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τμήματος είναι $8m^2$, η πλευρά C_1B_1 είναι 2m και ότι όλα τα τετράπλευρα είναι κανονικά και τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και ισοσκελή.



$(C_1B_1)^2 = (VB_1)^2 + (VC_1)^2 \Leftrightarrow (2m)^2 = 2\cdot VB_1^2 \Leftrightarrow$
$2m = \sqrt{2}\cdot VB_1 \Leftrightarrow VB_1 = \sqrt{2}\cdot m$

$E_{VA1ZW} = (2\cdot VC_1)^2 = (2\cdot \sqrt{2}^2 = 8m^2)$

$E_{RUTS} = E_{VA1ZW} + E_{\gamma\rho\alpha\mu\mu} = 8m^2 + 8m^2 = 16m^2$

$E_{RUTS} = (RS)^2 \Leftrightarrow (RS)^2 = 16m^2 \Leftrightarrow RS = 4m$

$(RS)^2 = (RO)^2 + (OS)^2 \Leftrightarrow$

$(4m)^2 = 2(RO)^2 \Leftrightarrow 4m = \sqrt{2}\cdot RO] \Leftrightarrow$

$RO = 2\sqrt{2}\cdot m$

$(NO)^2 = 2(JN)^2 \Leftrightarrow (2\cdot 2\cdot \sqrt{2}\cdot m)^2 = 2(JN)^2 \Leftrightarrow$

$(NO)^2 = 2(JN)^2 \Leftrightarrow (2\cdot 2\cdot \sqrt{2}\cdot m)^2 = 2(JN)^2 \Leftrightarrow$

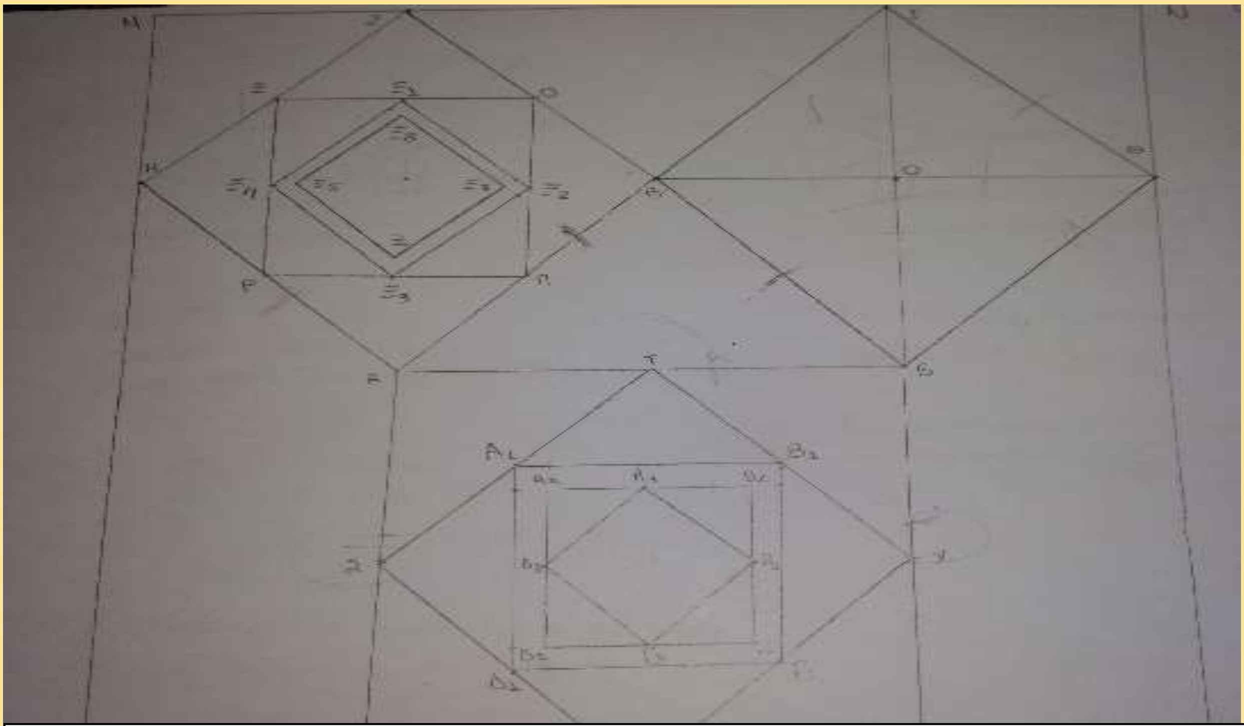
$32m^2 = 2(JN)^2 \Leftrightarrow JN = 4m$

$JN = 4m \Leftrightarrow JK = 8m$

Λόγω παραλληλίας παρατηρούμε ότι JK=GE και EB=GD=EG/2.Έχουμε λοιπόν BD (πλευρά της πλατείας):

BD=EB+GD+EG=4m+4m+8m=16m. Άρα το εμβαδό της πλατείας είναι $(16m)^2=256m^2$

2)



ε1=x , ε2=x , ε3=(ΕΙΘΒ)=2 άρα πλευρά $\sqrt{2}$

ΕΑΒ= ισοσκελές ορθογώνιο

ΝΔΟ: ΙΒ=ΑΒ

Τραπέζιο ΓΒΘΚ=ΑΒΛΗ (ύψος ΓΒΘΚ=ΟΘ και ΑΔΛΗ=ΕΟ)

N.B. το ΕΒ (ΓΒΘΚ)

Το ΙΒ (ΑΒΕ)

Το ΙΟ

Αν Ξ,Ο,Π,Ρ μέσα των πλευρών, να βρεθεί (ΞΖΟ) και (ΜΖΗ)

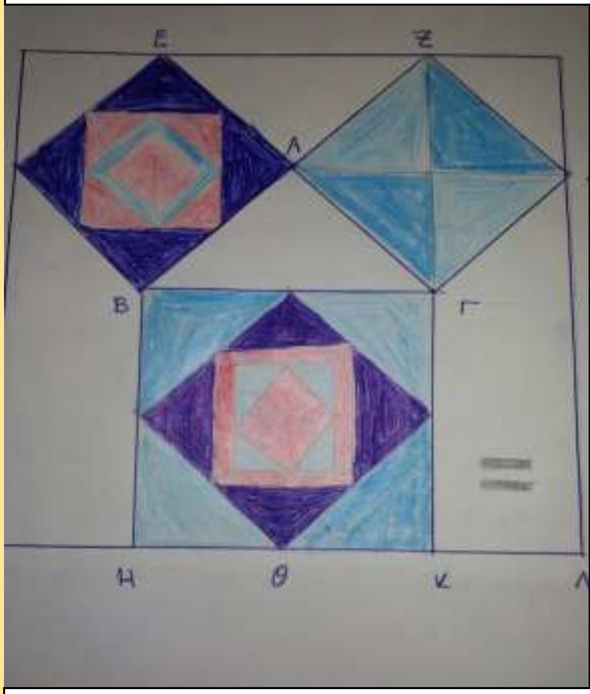
και Σ,Τ,Υ,Φ μέσα των πλευρών να βρεθεί ($Α_1Β_1Γ_1Δ_1$)

ΑΗΖΕ=ΑΒΓΔ=ΒΕΙΘ=τετράγωνα

Αν ($Α_2Β_2Γ_2Δ_2$)=$^1/_4$ να βρεθεί: i) η κάθε πλευρά του τετραγώνου ii) το ($Α_3Β_3Γ_3Δ_3$) ii) Να βρεθεί επίσης το ($Ξ_1Ξ_2Ξ_3Ξ_4$)-($Ξ_5Ξ_6Ξ_7Ξ_8$) αν ($Ξ_5Ξ_6Ξ_7Ξ_8$)= 1/4

3)

Του Πυθαγόρα του αρέσει να ψάχνει ίσα εμβαδά στους πίνακες. Σε αυτόν τον πίνακα παρατηρεί ότι το εμβαδόν των τριών μεγάλων τετραγώνων είναι ίσο με το γκρι του υπόλοιπου πίνακα. Να εξετάσετε αν ισχύει.

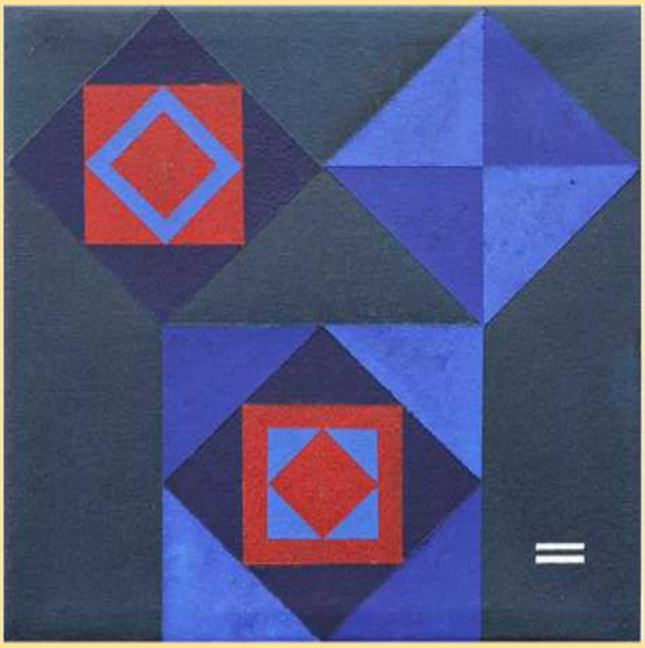


ΑΒΓ το κεντρικό τρίγωνο, ΒΓΚΗ το μεγάλο τετράγωνο, ΑΓΛΖ και ΑΒΔΕ τα δύο μικρότερα τετράγωνα, Θ το μέσο της ΗΚ και ΜΝ η κάτω πλευρά του πίνακα.

Υποθέτουμε ότι το μήκος των καθέτων πλευρών του κεντρικού ορθογωνίου τριγώνου είναι α. Τότε ΒΓ=$\sqrt{2}$ α. Άρα και ΗΚ=$\sqrt{2}$ α. Άρα ΜΝ= 4ΜΗ= 4ΗΘ= 2ΗΚ= 2$\sqrt{2}$ α. Άρα το εμβαδόν του πίνακα είναι MN^2= $(2\alpha\sqrt{2})^2$ = 4×2α^2= 8α^2.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι το εμβαδόν των τριών μεγάλων τετραγώνων είναι το μισό του εμβαδού του πίνακα, δηλαδή 4α^2. Από το πυθαγόρειο θεώρημα το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου ισούται με το άθροισμα των 2 μικρότερων. Άρα (ΑΒΔΕ) + (ΑΓΛΖ) + (ΒΓΚΗ) = 2(ΒΓΚΗ) = 2$(\alpha\sqrt{2})^2$ = 2×2α^2 = 4α^2. Άρα όντως το εμβαδόν των μεγάλων τετραγώνων είναι ίσο με αυτό του υπόλοιπου σχήματος.

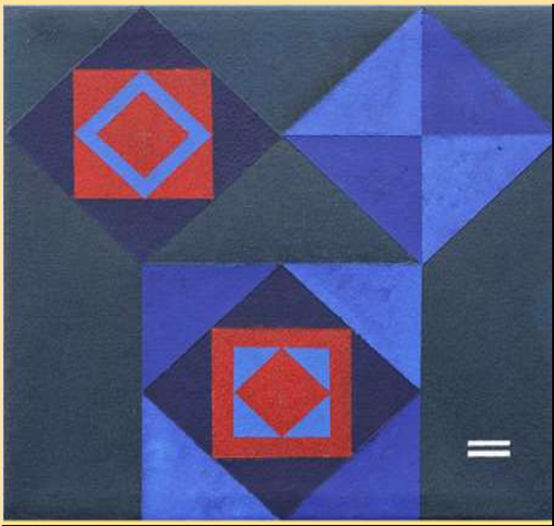
4)



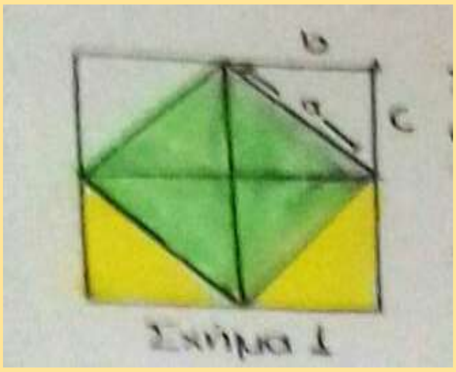
Σε ένα οικόπεδο ο ιδιοκτήτης έχει χτίσει δύο ίσα σπίτια και ένα μεγαλύτερο. Σε αυτά θέλει να χτίσει δυο ίσους κήπους και δύο ίσες αποθήκες. Οι κήποι παρουσιάζονται σαν τραπέζια και οι αποθήκες σαν τρίγωνα. Έστω η πλευρά του μεγαλυτέρου σπιτιού είναι ίση με $\sqrt{2}$α.

Α) Να δειχθεί ότι οι αποθήκες είναι ίσες Β) Να δειχθεί ότι οι κήποι είναι ίσοι

5)



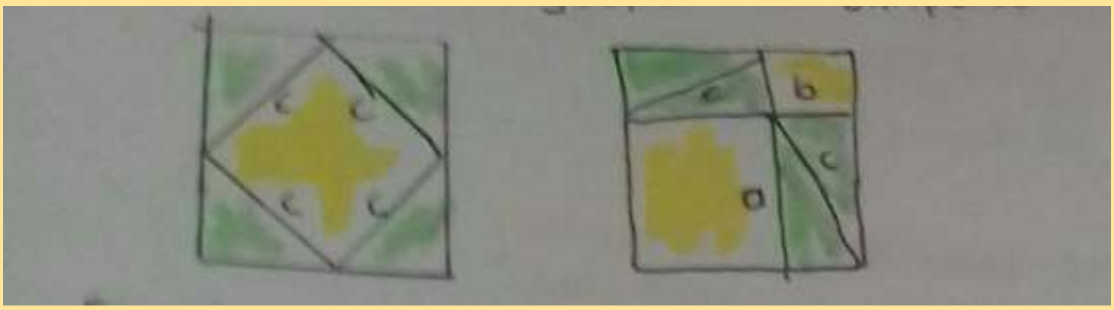
Ο Πυθαγόρας βλέπει την κάτοψη ενός κτιρίου της Μαθηματικουπολης από ένα ελικόπτερο. Παρατηρεί τα δυο τετράγωνα στο πάνω μέρος της κάτοψης και βλέπει πληθώρα μαθηματικών εννοιών. Επειδή το ελικόπτερο ξεμένει από καύσιμα, αποφασίζει να ασχοληθεί μόνο με δυο έννοιες. Στο δεξί τετράγωνο θα αποδείξει το θεώρημα του, ενώ στο αριστερό θα αποδείξει ότι το άθροισμα των εμβαδών όλων των τετραγώνων εκτός του μικρότερου ,αν συνεχιστεί στο άπειρο ισούται με 2 αν το εμβαδόν του μεγαλύτερου τετραγώνου είναι ίσο με 1.



Απόδειξη πυθαγόρειου θεωρήματος

Στο σχήμα ένα βλέπουμε ένα τετράγωνο χωρισμένο σε 8 ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα, τα κίτρινα τρίγωνα σχηματίζουν κι αυτά 1 τετράγωνο.

Έχουμε a×a+b×b=c×c



Εάν ανακατατάξουμε τα σχήματα προκύπτει

Εάν υπολογίσουμε το εμβαδόν έχουμε

Εκ1=a^2+b^2

Εκ1=c^2

Άρα $a^2+b^2=c^2$

Άπειρο

Υποθέτοντας ότι το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου είναι 1 έχουμε ότι το άθροισμα είναι:

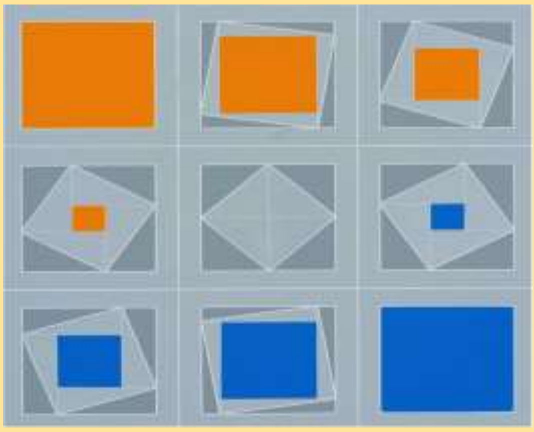
1+1/2+1/4+1/4+1/8...

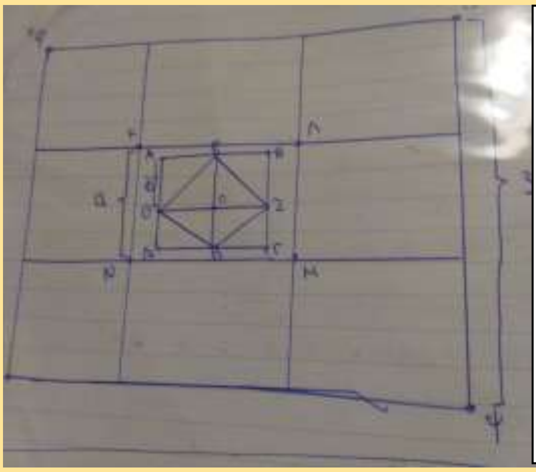
Όμως ξέρουμε ότι

2=1+1=1+1/2+1/2=1+1/2+1/4+1/4...

Άρα το άθροισμα είναι ίσο με 2

ΕΝΤΥΠΩΣΙΑΚΟ!





Έστω τετράγωνο ΚΛΜΝ πλευράς α και τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2β. Αν Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών της και ΑΒ παράλληλη ΘΖ και ΕΗ παράλληλη ΒΓ και Ο σημείο τομής των ΕΗ,ΘΖ. Να υπολογίσετε τον λόγο του (ΕΘΖΗ) προς του (ΚΛΜΝ) καιτου (ΕΘΖΗ) προς του (ΦΧΨΩ).(Δίνεται ότι ΦΧΨΩ: τετράγωνο ΦΧ=3α)

<u>Λύση</u>

Ισχύει ότι: (ΚΛΜΝ)=$α^2$ και (ΦΧΨΩ)=$9α^2$ και (ΑΒΓΔ)=$4β^2$ (1)

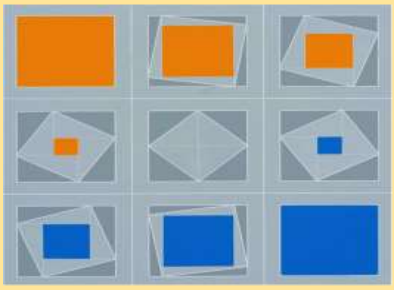
Από Πυθαγόρειο: $ΕΖ^2=ΕΒ^2+ΒΖ^2$ <=> ΕΖ=√2 β

Προκύπτει πως: ΟΕΖ=ΕΖΒ και ΟΖΕ=ΒΕΖ (ως εντός εναλλάξ)

Άρα ΕΟΖ=90^0 και το ΕΟΖ: ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ΕΖ=√2 β

Όμοια, προκύπτει πως (ΕΘΖΗ)=$(\sqrt{2}\ β)^2=2β^2$ (2)

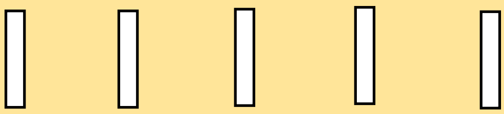
Άρα, (ΕΘΧΗ)=2(ΑΒΓΔ) (από (1),(2)) και (ΕΘΖΗ)/(ΚΛΜΝ)=$2β^2$ και (ΕΘΖΗ)/(ΦΧΨΩ)=$2β^2/9α^2$



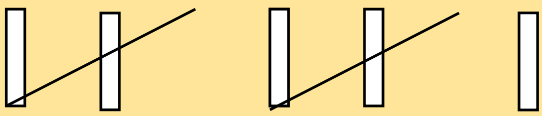
Ο παππούς Ευκλείδης και η γιαγια Υπατία έβαλαν ένα πρόβλήμα στον εγγονο τους ,τον μικρό Θαλή.Το ερώτημα ηταν το εξής: πως γίνεται απο 5 ισα τετραγωνα να σχηματιστει ενα καινουριο.Ο μικρος Θαλης προβληματιστηκε και δεν μπορεσε να βρει αμεσως τη λυση.Μετα απο λιγο,καθως επαιρνε φωτογραφιες με τη φωτογραφικη μηχανη του μπαμπα Αρχιμηδη, παρατηρησε πως οταν εκανε ζουμ ο φακος σχηματιζοταν ενα σχημα το οποιο θα μπορουσε να ειναι η λυση στο προβλημα του παππου και της γιαγιας...

ΛΥΣΗ

Εχουμε τα παρακατω τετραγωνα :



Για να σχηματισουμε 1 τετραγωνο κανουμε το εξης:



Αρα τι εχουμε ;